



WYDZIAŁ ELEKTRONIKI,  
TELEKOMUNIKACJI  
I INFORMATYKI



# Obwody i sygnały

dr inż. Kamil Stawiarski

3 sierpnia 2026



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



## Sprawy organizacyjne

Wykład 1

Wykład 2

Wykład 3

Wykład 4

Wykład 5

Wykład 6

Wykład 7

Wykład 8

Wykład 9

Wykład 10

**Wykład 11**

**Wykład 12**

**Wykład 13**

**Wykład 14**

**Wykład 15**

**Bibliografia**

# Sprawy organizacyjne

### Konsultacje i kontakt

- Osoba odpowiedzialna za przedmiot: dr inż. K. Stawiarski
- E-mail: [kamil.stawiarski@pg.edu.pl](mailto:kamil.stawiarski@pg.edu.pl)
- Konsultacje: środy, 16:15–17:00, EA550
- Preferowane konsultacje mailowe bądź online po wcześniejszym umówieniu

- Wykład: 30 godzin ( $15 \times 90$  min)
- Ćwiczenia: 30 godzin ( $30 \times 45$  min)
- Wykład podzielony jest na 3 części:
  - Część I – stałoprądowa (6 wykładów)
  - Część II – zmiennoprądowa (5 wykładów)
  - Część III – sygnałowa (2 wykłady)
- Każda z części wykładu kończy się zaliczeniem.

## Książki

- *Podstawy teorii obwodów, tom 1 i 2*, Jerzy Osowski, Jerzy Szabatin, Wydawnictwo Naukowe PWN
- *Engineering Circuit Analysis*, J.D. Irwin, R.M. Nelms, Wiley

## Symulatory

- *Falstad* <https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>
- *Xyce* <https://xyce.sandia.gov/>
- *Octave* <https://octave.org/>

## Kalkulator

W trakcie zajęć oraz podczas kolokwium i egzaminów bardzo przydatny będzie kalkulator naukowy. Bez jego użycia rozwiązanie zadań w wyznaczonym czasie może być praktycznie niemożliwe. Najlepiej sprawdzają się modele firmy Casio, zwłaszcza Casio FX-991CEX, który umożliwia wykonywanie obliczeń na liczbach zespolonych, macierzach, a także posiada wiele zaawansowanych funkcji przydatnych w teorii obwodów. Alternatywnie można rozważyć również inne modele, takie jak:

- Casio FX-570EX
- Casio FX-991EX
- Sharp EL-W506T
- Texas Instruments TI-36X Pro

Ważne, by wybrany kalkulator miał funkcje operacji na liczbach zespolonych oraz macierzach — tylko wtedy będzie w pełni funkcjonalny na zajęciach i podczas egzaminów.



- Do zaliczenia są dwa kolokwia (część stałoprądowa, część zmiennoprądowa) oraz egzamin (część sygnałowa).
- Aby zdać, należy uzyskać:
  - wynik średniej ważonej (wagi K1: 0.3, K2: 0.2, E: 0.4) z trzech części co najmniej 50% ,
  - co najmniej 30% z każdej części.

## Oceny na podstawie średniej

- [50%; 60%) – 3,0
- [60%; 70%) – 3,5
- [70%; 80%) – 4,0
- [80%; 90%) – 4,5
- [90%; 100%] – 5,0

Tabela: Przykładowe wyniki

| K1 [%] | K2 [%] | E [%] | Śr. $\geq 50\%$ ? | Każda $\geq 30\%$ ? | Zdane? |
|--------|--------|-------|-------------------|---------------------|--------|
| 10     | 10     | 40    | Nie (22%)         | Nie                 | Nie    |
| 80     | 20     | 70    | Tak (58%)         | Nie                 | Nie    |
| 40     | 40     | 40    | Nie (40%)         | Tak                 | Nie    |
| 60     | 70     | 80    | Tak (71%)         | Tak                 | Tak    |

- Kolokwium 1 (część stałoprądowa) – w trakcie ćwiczeń, w okolicy połowy semestru.
- Kolokwium 2 (część zmiennoprądowa) – po zajęciach, w ustalonym terminie, w okolicach końca semestru.
- Egzamin – w sesji.
- W trakcie egzaminu oraz kolejnych terminów zaliczeń będzie można podejść do poprawy dowolnej części.
- Wynik uzyskany w kolejnym terminie nadpisuje poprzednio uzyskany.

# Wykład 1

## Ładunek elektryczny

Wielkość fizyczna charakteryzująca ciała podlegające działaniu pola elektromagnetycznego i będące źródłem takiego pola<sup>1</sup>. Jednostką ładunku jest kulomb (symbol  $C$ ) i stanowi on około  $6,241 \cdot 10^{18}$  ładunków pojedynczego elektronu. Na ogół ładunek oznacza się symbolem  $q$ .

<sup>1</sup><https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/;3934793>

## Natężenie prądu

Natężenie prądu określa tempo przepływu ładunku w czasie. Jednostką natężenia jest amper ( $1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}$ ). Przepływ prądu oznacza się na ogół symbolem  $i$ , który można przedstawić jako  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  lub równoważnie  $q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ . Natężenie mierzy się w punkcie obwodu, przez który przepływa prąd.

Tabela: Przykładowe wartości natężenia

| Natężenie [A]              | Zjawisko / urządzenie                          |
|----------------------------|------------------------------------------------|
| $\approx 10^5$             | Piorun                                         |
| $\approx 10^3$             | Duży silnik przemysłowy                        |
| $\approx 10$               | Płyta grzewcza                                 |
| $\approx 2$                | Prąd ładowania telefonu                        |
| $\approx 30 \cdot 10^{-3}$ | Umowna granica prądu niebezpiecznego dla życia |
| $\approx 10^{-6}$          | Prąd pobierany przez uśpiony mikrokontroler    |
| $\approx 10^{-12}$         | Prąd synaptyczny                               |

## Napięcie elektryczne

Napięcie określa ilość pracy, jaką należy wykonać, aby przemieścić ładunek  $q$  między dwoma punktami obwodu. Na ogół napięcie oznacza się symbolem  $u$ . Jednostką napięcia jest wolt (V). Napięcie mierzy się między dwoma punktami.



Tabela: Przykładowe wartości napięcia

| Napięcie [V]      | Zjawisko / urządzenie                           |
|-------------------|-------------------------------------------------|
| $\approx 10^8$    | Piorun                                          |
| $\approx 10^6$    | Linie przesyłowe najwyższych napięć             |
| $\approx 10^4$    | Duże silniki przemysłowe                        |
| $\approx 230$     | Napięcie sieciowe                               |
| $\approx 20$      | Ładowarka laptopa                               |
| $\approx 10^{-3}$ | Napięcie EKG                                    |
| $\approx 10^{-5}$ | Napięcie EEG                                    |
| $\approx 10^{-6}$ | Napięcie na wyjściu anteny odbiornika radiowego |

## Prawo Ohma

Natężenie prądu  $i$  jest wprost proporcjonalne do przyłożonego do przewodnika napięcia  $u$ .

Proporcjonalność ta jest określona przez **rezystancję**, która jest własnością konkretnego przewodnika.

## Rezystancja

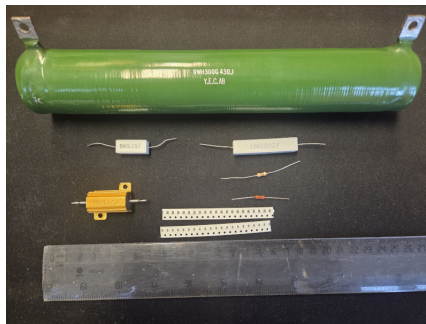
Rezystancja to własność przewodnika określająca stosunek przyłożonego napięcia do przepływającego prądu. Na ogół oznacza się ją symbolem  $R$ , a jednostką jest om ( $\Omega$ ). Zgodnie z prawem Ohma:  $i(t) = \frac{u(t)}{R}$ . Najczęściej wykorzystuje się trzy formy niezależne od czasu:  $R = \frac{u}{i}$ ,  $i = \frac{u}{R}$ ,  $u = iR$ . Rezystancja zależy od materiału wykonania przewodnika, jego długości, przekroju itp.

Tabela: Przykładowe wartości rezystancji

| Rezystancja [ $\Omega$ ] | Przykład                                                |
|--------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\approx 10^{12}$        | Powietrze / dobre izolatory w warunkach laboratoryjnych |
| $\approx 10^9$           | Tworzywa sztuczne (izolatory)                           |
| $\approx 10^7$           | Ciało człowieka (sucha skóra)                           |
| $\approx 10^5$           | Ciało człowieka (wilgotna skóra)                        |
| $\approx 10^3$           | Słuchawki, czujniki, rezystory w elektronice cyfrowej   |
| $\approx 10^2$           | Mały rezystor w układach elektronicznych                |
| $\approx 1$              | Typowy głośnik niskoomowy / uzwojenie transformatora    |
| $\approx 10^{-3}$        | Gruby przewód miedziany (kilka metrów)                  |

## Rezystor

Jeden z podstawowych, pasywnych elementów elektronicznych. Idealny rezystor cechuje się stałą, niezmienną rezystancją. W rzeczywistości rezystory charakteryzują się również maksymalną mocą, z jaką mogą pracować, stałością parametrów itp.



Rysunek: Przykładowe rezystory różnych mocy.

## Energia

Różnica potencjałów między punktami  $A$  i  $B$  równa  $1\text{ V}$  oznacza, że przetransportowanie ładunku  $q = 1\text{ C}$  z punktu  $A$  do  $B$  wymaga dostarczenia energii  $1\text{ J}$ . Ten sam ładunek poruszający się z punktu  $B$  do  $A$  odda energię  $1\text{ J}$ . Zależność między energią, napięciem i ładunkiem:  $E = u \cdot q$ .

## Moc

Moc informuje o szybkości zmiany energii w czasie,  $P(t) = \frac{dE(t)}{dt}$ . Jeśli zamiast pojedynczego ładunku między punktami  $A$  i  $B$  przepływa prąd elektryczny, do układu dostarczana jest moc. Zależność:  $P(t) = u(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} = u(t) i(t)$ . Często używa się uproszczonej postaci  $P = u \cdot i$ , a z wykorzystaniem prawa Ohma:  $P = i^2 R = \frac{u^2}{R}$ .

Tabela: Przedrostki dziesiętne

| Przedrostek | Symbol | Mnożnik    |
|-------------|--------|------------|
| piko        | p      | $10^{-12}$ |
| nano        | n      | $10^{-9}$  |
| mikro       | $\mu$  | $10^{-6}$  |
| mili        | m      | $10^{-3}$  |
| kilo        | k      | $10^3$     |
| mega        | M      | $10^6$     |

## Obwód elektryczny

Obwód elektryczny to zamknięty układ elementów przewodzących, w którym pod wpływem przyłożonego napięcia może płynąć prąd elektryczny.

Co tworzy obwód?

- Obwód zawiera co najmniej źródło zasilania oraz jeden odbiornik (np. żarówkę, rezystor), połączone przewodami w pętlę.
- Jeśli ścieżka przewodzenia jest przzerwana, obwód jest otwarty i prąd nie płynie; gdy połączenia tworzą pełną pętlę, obwód jest zamknięty i możliwy jest przepływ prądu.

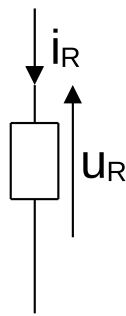


Poniżej wymieniono wyłącznie elementy występujące w obrębie niniejszego przedmiotu; w praktyce lista elementów jest znacznie dłuższa.

- Rezystory, cewki, kondensatory
- Źródła niezależne
- Źródła zależne
- Wzmacniacze operacyjne

## Rezystor

Rezystor oznaczany jest za pomocą symbolu prostokąta z dwoma wyprowadzeniami na krótszych bokach. Prąd  $i_R$  przepływający przez rezystor powoduje powstanie napięcia  $u_R$ . Napięcie na rezystorze zwykle strzałkuje się przeciwnie do przepływu prądu (przy konwencji odbiornikowej). Na rezystorze moc może być jedynie wydzielana – rezystor nie jest w stanie dostarczyć mocy do obwodu.



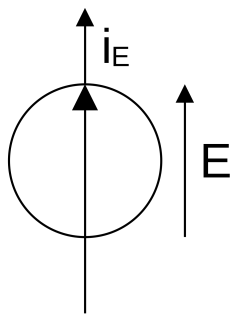
Rysunek: Rezystor z przepływającym prądem i strzałką napięcia.

## Symulacja zachowania rezystora

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Źródło napięciowe

Idealne źródło napięciowe to element, na którego zaciskach zawsze występuje napięcie  $E$ , niezależnie od przepływu prądu  $i_E$ . Idealne źródło napięciowe nie występuje w rzeczywistości, ale podobnie do niego zachowują się np. akumulatory, baterie, zasilacze. Strzałka wewnętrzna wskazuje zwrot napięcia i jest zgodna ze strzałką napięcia  $E$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że zwrot prądu  $i_E$  jest zgodny ze strzałką napięcia. Źródło napięciowe może zarówno dostarczać, jak i odbierać moc w obwodzie.



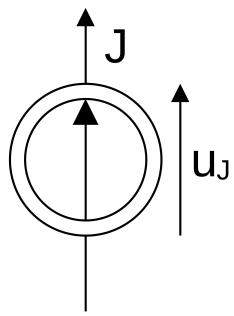
Rysunek: Idealne źródło napięciowe z przepływającym prądem i strzałką napięcia.

Symulacja zachowania źródła napięciowego

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Źródło prądowe

Idealne źródło prądowe to element, przez który zawsze płynie prąd  $J$ , niezależnie od napięcia  $u_J$  na jego zaciskach. Idealne źródło prądowe nie występuje w rzeczywistości; ze względu na swój charakter nie ma prostych odpowiedników w elementach rzeczywistych, co utrudnia jego intuicyjne zrozumienie. Strzałka wewnętrzna wskazuje zwrot przepływu prądu  $J$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że zwrot napięcia  $u_J$  jest zgodny ze strzałką prądu. Źródło prądowe może zarówno dostarczać, jak i odbierać moc w obwodzie.



Rysunek: Idealne źródło prądowe z przepływającym prądem i strzałką napięcia.

## Symulacja zachowania źródła prądowego

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK), zwane też pierwszym prawem Kirchhoffa, mówi, że w każdym węźle obwodu elektrycznego suma algebraiczna prądów jest równa zeru. Inaczej: suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających, co wynika z zasady zachowania ładunku elektrycznego – ładunek nie może się w węźle ani gromadzić, ani zniknąć. Prawo to zapisuje się zwykle jako  $\sum i = 0$ , przy czym prądom wpływającym nadaje się znak dodatni, a wypływającym – ujemny.



Napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK), nazywane też drugim prawem Kirchhoffa, mówi, że w każdym zamkniętym oczku obwodu algebraiczna suma wszystkich napięć jest równa zero. Równoważnie można powiedzieć, że suma spadków napięć na elementach odbiorczych w oczku jest równa sumie sił elektromotorycznych źródeł w tym oczku. Matematycznie zapisuje się to zwykle jako  $\sum u = 0$ , przy czym napięcia zgodne z przyjętym kierunkiem obiegu oczka przyjmuje się z plusem, a przeciwnie – z minusem.

Zasada zachowania energii mówi, że w układzie izolowanym całkowita energia nie może być ani stworzona, ani zniszczona – może jedynie zmieniać formę (np. z elektrycznej w ciepłą).

### Zasada Tellegena w obwodach

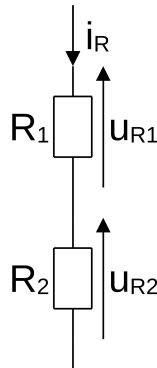
- W teorii obwodów odpowiednikiem tej zasady jest twierdzenie Tellegena: w dowolnym obwodzie skupionym suma mocy dostarczanych przez wszystkie elementy jest równa sumie mocy przez nie pobieranych, czyli suma algebraiczna mocy we wszystkich gałęziach jest równa zero.
- Oznacza to, że energia dostarczana przez źródła napięcia i prądu w obwodzie w każdej chwili dokładnie równoważy energię zużywaną lub magazynowaną w elementach biernych (rezystorach, cewkach, kondensatorach), co jest bezpośrednim zastosowaniem ogólnej zasady zachowania energii do sieci elektrycznych.

W elektrotechnice skrót SLS oznacza „skupiony, liniowy, stacjonarny” obwód elektryczny – układ z elementami skupionymi, spełniającymi prawo Ohma i o parametrach niezmiennych się w czasie.

## Wykład 2

## Połączenie szeregowe

Połączenie szeregowe rezystorów (w tym przypadku dwóch, o wartościach  $R_1$  i  $R_2$ ) polega na takim połączeniu wyprowadzeń, aby koniec jednego był początkiem drugiego. Szeregowo może być połączona dowolna liczba rezystorów. W przypadku obliczania rezystancji zastępczej kolejność połączenia nie ma znaczenia.

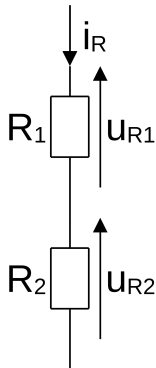


Rysunek: Szeregowe  
połączenie rezystorów.

## Połączenie szeregowe

Można zauważyć, że przez oba rezystory przepływa ten sam prąd, oznaczony jako  $i_R$ . W efekcie jego przepływu na rezystorach pojawia się napięcie:

$$u_{R1} = R_1 \cdot i_R, \quad u_{R2} = R_2 \cdot i_R.$$

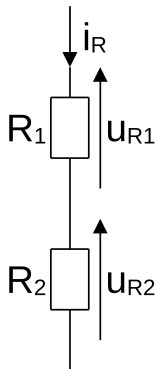


Rysunek: Szeregowe  
połączenie rezystorów.

## Połączenie szeregowe

Spadek napięcia na rezystorach  $R_1$  i  $R_2$  można zastąpić pojedynczym spadkiem napięcia o wartości  $u_{R1} + u_{R2}$ . W takiej sytuacji przepływowi prądu  $i_R$  towarzyszy napięcie

$$u_{R1} + u_{R2} = i_R R_1 + i_R R_2 = i_R (R_1 + R_2).$$



Rysunek: Szeregowe połączenie rezystorów.

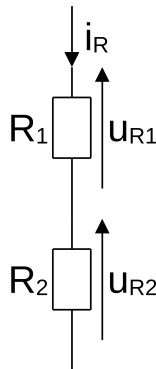
## Połączenie szeregowe

Oznacza to, że dwa szeregowo połączone rezystory o wartościach  $R_1$  i  $R_2$  można zastąpić rezystancją zastępczą o wartości

$$R_Z = R_1 + R_2.$$

Dla większej liczby rezystorów prawdziwy jest wzór

$$R_Z = \sum_{n=1}^N R_n.$$



Rysunek: Szeregowe  
połączenie rezystorów.



## Dzielnik napięciowy

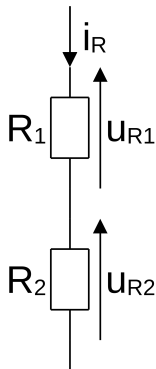
Przyjmijmy, że na dwa szeregowo połączone rezystory  $R_1$  i  $R_2$  podano napięcie  $u_R$ . Przez oba rezystory popłynie prąd

$$i_R = \frac{u_R}{R_1 + R_2}.$$

Oznacza to, że napięcia na rezystorach wynoszą odpowiednio

$$u_{R1} = u_R \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad u_{R2} = u_R \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Zmieniając wartości rezystorów  $R_1$  i  $R_2$  można uzyskać odpowiednio pomniejszone napięcie.



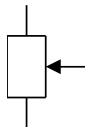
Rysunek: Szeregowe  
połączenie rezystorów.

Symulacja zachowania dzielnika napięciowego

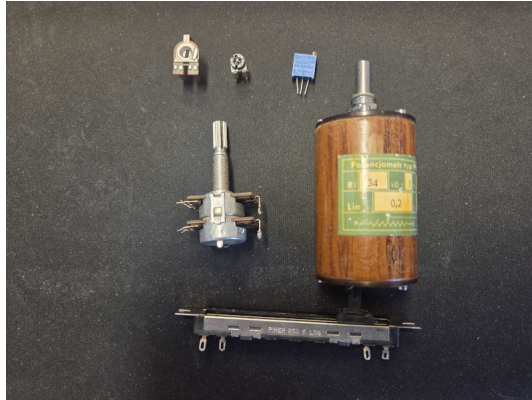
<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Potencjometr

Potencjometr to rezystor o regulowanej wartości, zwykle z trzema wyprowadzeniami, działający jak nastawny dzielnik napięcia w obwodzie elektrycznym. Używa się go m.in. do płynnej regulacji parametrów takich jak głośność, jasność czy prędkość obrotowa silnika w różnych urządzeniach elektronicznych. Potencjometr jest zbudowany z elementu oporowego (ścieżki rezystancyjnej) połączonego między dwoma skrajnymi wyprowadzeniami oraz ruchomego suwaka, który stanowi trzecie wyprowadzenie. Suwak przesuwają się lub obraca po ścieżce wewnątrz obudowy potencjometru, zmieniając punkt dołączenia i tym samym wartość rezystancji między suwakiem a każdym z końców ścieżki.



Rysunek: [Symbol potencjometru.](#)



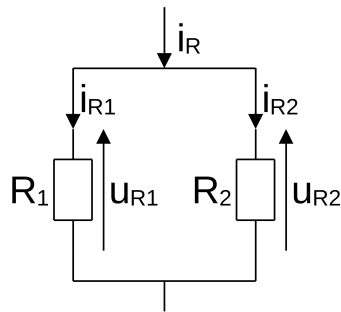
Rysunek: Przykładowe potencjometry.

## Symulacja zachowania potencjometru

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Połączenie równoległe

Połączenie równoległe rezystorów (w tym przypadku dwóch, o wartościach  $R_1$  i  $R_2$ ) polega na takim połączeniu wyprowadzeń, aby oba końce jednego rezystora były połączone odpowiednio z oboma końcami drugiego, czyli oba elementy są wpięte między te same dwa węzły obwodu. Równoległe może być połączona dowolna liczba rezystorów, a kolejność ich podłączania nie ma znaczenia, ponieważ każdy z nich ma to samo napięcie, a prądy przez poszczególne gałęzie po prostu się sumują.

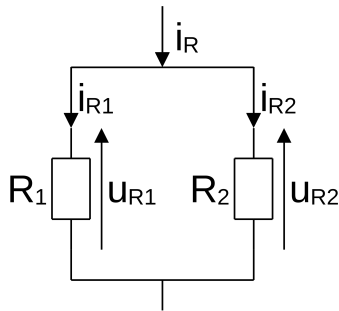


Rysunek: Równoległe  
połączenie rezystorów.

## Połączenie równoległe

W połączeniu równoległym oba rezystory mają to samo napięcie między zaciskami, oznaczone zwykle jako  $u_{R1} = u_{R2} = u_R$ . Przez każdy z nich płynie natomiast inny prąd gałęziowy:

$$i_{R1} = \frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_R}{R_1}, \quad i_{R2} = \frac{u_{R2}}{R_2} = \frac{u_R}{R_2}.$$



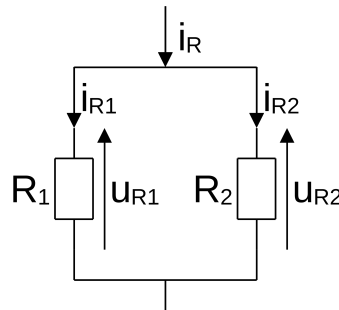
Rysunek: Równoległe  
połączenie rezystorów.

## Połączenie równoległe

Prąd przepływający przez oba rezystory jest sumą prądów gałęziowych:

$$i_R = i_{R1} + i_{R2}.$$

Z perspektywy reszty układu, przyłożonemu napięciu  $u_R$  towarzyszy przepływ prądu  $i_R$ .



Rysunek: Równoległe  
połączenie rezystorów.



## Połączenie równoległe

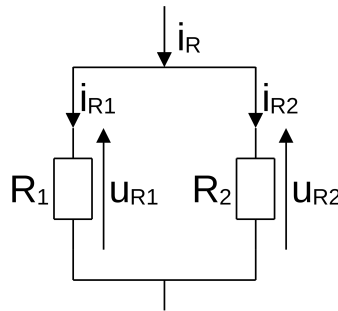
Na tej podstawie można określić rezystancję zastępczą:

$$R_Z = \frac{u_R}{i_R} = \frac{u_R}{i_{R1} + i_{R2}}, \quad \frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Dla większej liczby rezystorów prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{R_Z} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}.$$

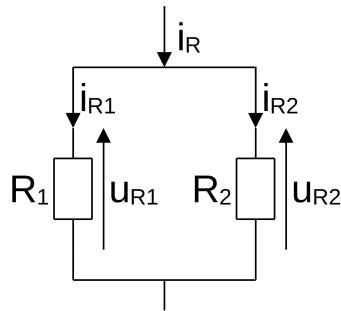


Rysunek: Równoległe  
połączenie rezystorów.

## Dzielnik prądowy

Podobnie jak w przypadku dzielnika napięciowego, można określić proporcje rozptywu prądów:

$$i_{R1} = i_R \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad i_{R2} = i_R \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



Rysunek: Równoległe  
połączenie rezystorów.

Symulacja zachowania dzielnika  
prądowego

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Siemens

Siemens (S) jest jednostką przewodności w układzie SI. W pewnych sytuacjach pozwala na uproszczenie obliczeń (np. przy połączeniu równoległym). Przewodność na ogół oznacza się symbolem  $G$ , przy czym  $G = \frac{1}{R}$ . Zależność między jednostkami:

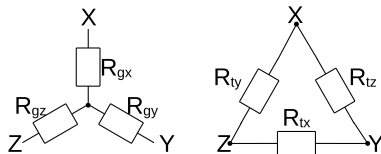
$$1 \text{ S} = \frac{1}{1 \Omega} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ V}}.$$

## Gwiazda

Połączenie rezystorów typu gwiazda polega na tym, że trzy (lub więcej) rezystory mają jeden wspólny punkt, a ich pozostałe końce wyprowadzone są do trzech osobnych zacisków – tworzy się więc układ przypominający literę Y.

## Trójkąt

Połączenie typu trójkąt (delta) oznacza, że trzy rezystory są połączone końcami w zamkniętą pętlę, tak że każdy wierzchołek trójkąta stanowi zacisk obwodu, a między każdą parą zacisków znajduje się jeden rezystor.



Rysunek: Połączenia typu gwiazda i trójkąt.

$$R_{gx} = \frac{R_{ty}R_{tz}}{R_{tx} + R_{tz} + R_{ty}}, \quad R_{gy} = \frac{R_{tx}R_{tz}}{R_{tx} + R_{tz} + R_{ty}},$$

$$R_{gz} = \frac{R_{tx}R_{ty}}{R_{tx} + R_{tz} + R_{ty}}.$$

$$R_{tx} = R_{gy} + R_{gz} + \frac{R_{gy}R_{gz}}{R_{gx}},$$

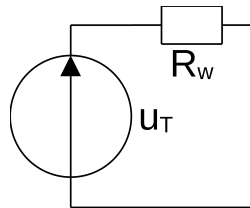
$$R_{ty} = R_{gx} + R_{gz} + \frac{R_{gx}R_{gz}}{R_{gy}},$$

$$R_{tz} = R_{gx} + R_{gy} + \frac{R_{gx}R_{gy}}{R_{gz}}.$$

Rzeczywiste źródło napięciowe dostarcza określonego napięcia, ale ma wewnętrzną rezystancję, przez co jego napięcie wyjściowe zależy od obciążenia i nie jest idealnie stałe. Typowo opisuje się je modelem „idealne źródło napięcia + szeregowy opór wewnętrzny”, co powoduje spadek napięcia przy dużym poborze prądu i ogranicza maksymalny prąd. Przykładami rzeczywistych źródeł napięcia są baterie i akumulatory stosowane w urządzeniach przenośnych, zasilacze sieciowe do elektroniki użytkowej, laboratoryjne zasilacze stabilizowane, a także prądnice i alternatory w elektrowniach czy pojazdach.

## Źródło Thévenina

Źródło Thévenina to zastępcze źródło napięciowe, którym można zastąpić dowolny liniowy obwód widziany z dwóch zacisków. Składa się z idealnego źródła napięcia  $u_T$  połączonego szeregowo z rezystancją (ogólniej impedancją) wewnętrzną  $R_T$ , tak dobranych, aby od strony tych zacisków zachowywał się identycznie jak oryginalny obwód.

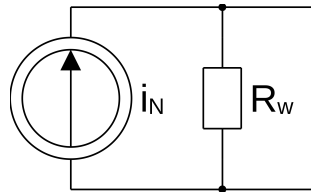


Rysunek: Źródło Thévenina.



## Źródło Nortona

Źródło Nortona to zastępcze źródło prądowe, którym można zastąpić dowolny liniowy obwód widziany z dwóch zacisków. Składa się z idealnego źródła prądu połączonego równolegle z rezystancją (impedancją) wewnętrzną, tak dobranych, aby od strony zacisków zachowywało się tak samo jak pierwotny obwód.



Rysunek: Źródło Nortona.

Poniżej przykładowa procedura wyznaczania źródła Thévenina i Nortona dla wybranego fragmentu obwodu (pomiędzy zaciskami A–B).

## Źródło Thévenina i Nortona

- Wyodrębnia się dwa zaciski analizowanego fragmentu obwodu, a element obciążenia odłącza się od tych zacisków.
- Wyznacza się napięcie między zaciskami przy otwartym obwodzie; przyjmuje się je jako napięcie Thévenina  $u_T$ .
- Wyznacza się prąd zwarcia, płynący między zaciskami przy ich zwarcu; przyjmuje się go jako prąd Nortona  $i_N$ .
- Oblicza się rezystancję wewnętrzną  $R_W = \frac{u_T}{i_N}$ .

Symulacja zachowania źródeł Thévenina  
i Nortona

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Wykład 3

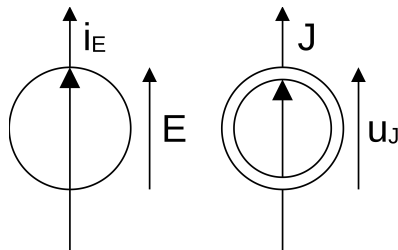
## Bilans mocy

Wykonanie bilansu mocy polega na sprawdzeniu, czy suma mocy dostarczanej do obwodu oraz wydzielanej przez jego elementy jest sobie równa. Sprawdzenie bilansu mocy pozwala na weryfikację poprawności obliczeń.

- Na rezystorach moc może się jedynie wydzielać.
- Źródła napięciowe oraz prądowe mogą zarówno dostarczać, jak i pobierać moc z obwodu.

## Źródła dostarczające moc

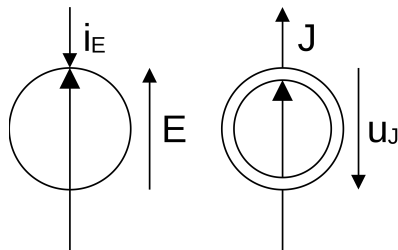
Jeżeli strzałka napięcia jest zgodna z kierunkiem przepływu prądu, to źródła dostarczają moc do obwodu (jak w przypadku po prawej).



Rysunek: Źródła dostarczające moc do obwodu.

## Źródła pobierające moc

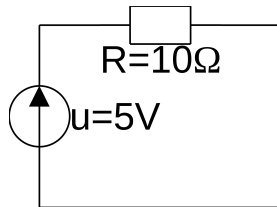
Jeżeli strzałka napięcia jest skierowana przeciwnie do kierunku przepływu prądu, to źródła stanowią odbiornik mocy w obwodzie (jak w przypadku po prawej).



Rysunek: Źródła pobierające moc z obwodu.

Na schemacie po prawej widoczne jest jedno źródło napięciowe o napięciu  $U = 5\text{ V}$  połączone z rezystorem o rezystancji  $R = 10\ \Omega$ . W takiej konfiguracji całe napięcie ze źródła odłoży się na rezystorze (NPK). W efekcie przez rezystor oraz źródło popłynie prąd o natężeniu

$$i = \frac{U}{R} = 0,5\text{ A}.$$



Rysunek: Przykład 1.



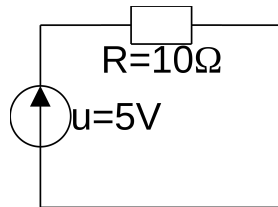
Moc dostarczona w obwodzie:

$$P_d = u \cdot i = 5 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} = 2,5 \text{ W}.$$

Moc oddawana w obwodzie:

$$P_o = u \cdot i = 5 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} = 2,5 \text{ W}.$$

Moc dostarczona jest równa mocy oddanej.

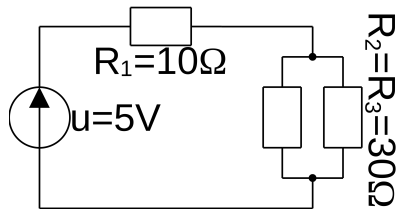


Rysunek: Przykład 1.

### Przykład 1 – symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Po prawej stronie widoczny jest nieco bardziej złożony schemat. Obwód składa się z jednego źródła i trzech rezystorów. Wykonanie bilansu mocy wymaga znajomości napięcia i prądu na każdym z elementów. Najprostszym sposobem obliczenia tych wartości jest przekształcenie obwodu z wykorzystaniem reguł łączenia rezystorów, obliczenie napięć i prądów, a następnie przywracanie pierwotnych połączeń.



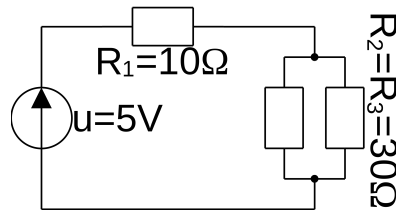
Rysunek: Przykład 2.

Dwa równolegle połączone rezystory  $R_2$  i  $R_3$  mają tę samą rezystancję  $30\ \Omega$ . Ich rezystancja zastępcza wynosi

$$R_{23} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30}\ \Omega = 15\ \Omega.$$

Po takiej zamianie pozostaje źródło napięciowe oraz szeregowe połączenie rezystorów  $R_1 = 10\ \Omega$  oraz  $R_{23} = 15\ \Omega$ . Oba rezystory można zastąpić pojedynczym rezystorem o rezystancji

$$R_z = 25\ \Omega.$$



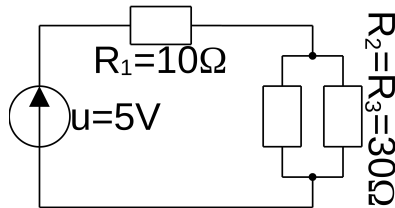
Rysunek: Przykład 2.

Pozostaje wtedy źródło napięciowe o napięciu  $u = 5\text{ V}$  połączone z rezystorem o rezystancji  $R_z = 25\ \Omega$ . W takim wypadku ze źródła będzie płynął prąd

$$i = \frac{5\text{ V}}{25\ \Omega} = 0,2\text{ A}.$$

Jak widać na schemacie po prawej, prąd ten popłynie przez rezystor  $R_1$ , skutkując powstaniem na jego zaciskach napięcia

$$u_1 = i \cdot R_1 = 0,2\text{ A} \cdot 10\ \Omega = 2\text{ V}.$$



Rysunek: Przykład 2.

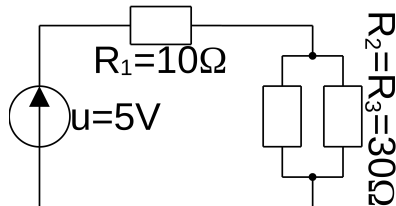
Zgodnie z napięciowym prawem Kirchhoffa: skoro źródło dostarcza napięcie 5 V, a na rezystorze  $R_1$  odkłada się 2 V, to na rezystorach  $R_2$  i  $R_3$  musi się odkładać napięcie

$$u_{23} = 5 \text{ V} - 2 \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Ponieważ  $R_2$  i  $R_3$  są równoległe, napięcie na obu jest takie samo. Prądy w gałęziach wynoszą:

$$i_2 = i_3 = \frac{u_{23}}{R_2} = \frac{3 \text{ V}}{30 \Omega} = 0,1 \text{ A}.$$

Prąd 0,2 A płynący przez rezystor  $R_1$  rozdziela się więc równomiernie na dwie gałęzie.



Rysunek: Przykład 2.

Znając wszystkie wartości prądów i napięć można wykonać bilans mocy.

Moc dostarczona w obwodzie:

$$P_d = u \cdot i = 5 \text{ V} \cdot 0,2 \text{ A} = 1 \text{ W}.$$

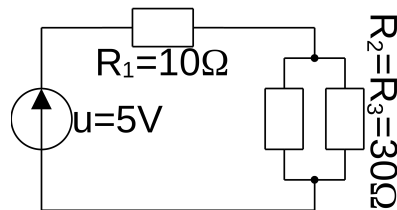
Moc oddawana w obwodzie:

$$P_1 = i \cdot u_1 = 0,2 \text{ A} \cdot 2 \text{ V} = 0,4 \text{ W},$$

$$P_2 = i_2 \cdot u_{23} = 0,1 \text{ A} \cdot 3 \text{ V} = 0,3 \text{ W},$$

$$P_3 = i_3 \cdot u_{23} = 0,1 \text{ A} \cdot 3 \text{ V} = 0,3 \text{ W}.$$

Suma mocy dostarczonej: 1 W, suma mocy oddawanej:  
 $0,4 + 0,3 + 0,3 = 1 \text{ W}.$



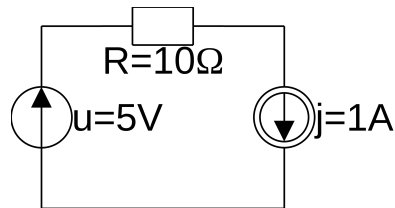
Rysunek: Przykład 2.

### Przykład 2 – symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>



Trzeci przykład stanowi schemat zbudowany ze źródła napięciowego, źródła prądowego oraz jednego rezystora. Ich wartości pokazane są na rysunku po prawej. Prąd wymuszany przez źródło prądowe o wydajności  $j = 1\text{ A}$  jest zgodny z kierunkiem napięcia źródła napięciowego.



Rysunek: Przykład 3.

Przepływ prądu  $j$  przez rezystor  $R = 10\ \Omega$  powoduje powstanie na nim napięcia o wartości

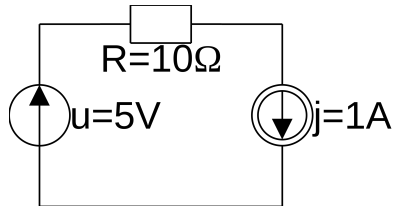
$$u_R = 10\ \text{V},$$

o zwrocie przeciwnym do przepływu prądu (czyli w lewo). W efekcie powstaje oczko, w którym napięcia muszą się wyrównać:

$$u - u_R + u_j = 0.$$

Znając wartości  $u = 5\ \text{V}$  i  $u_R = 10\ \text{V}$ , można obliczyć

$$u_j = 5\ \text{V}.$$



Rysunek: Przykład 3.

Obliczone wartości pozwalają wykonać bilans mocy.

Moc dostarczona w obwodzie:

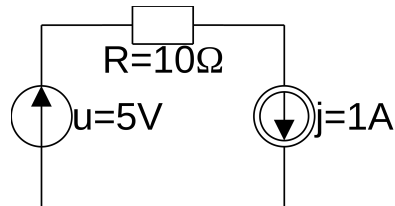
$$P_u = u \cdot j = 5 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 5 \text{ W},$$

$$P_j = u_j \cdot j = 5 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 5 \text{ W}.$$

Moc oddawana w obwodzie:

$$P_R = u_R \cdot j = 10 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 10 \text{ W}.$$

Suma mocy dostarczonej:  $5 \text{ W} + 5 \text{ W} = 10 \text{ W}$ , suma mocy oddawanej:  $10 \text{ W}$ .

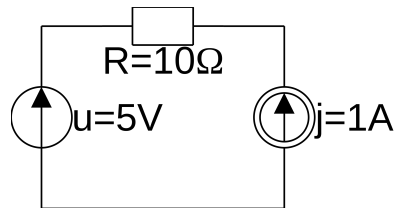


Rysunek: Przykład 3.

### Przykład 3 – symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Czwarty, ostatni przykład różni się od poprzedniego jedynie zwrotem źródła prądowego. Efektem jest jednak znaczna zmiana mocy dostarczanej i oddawanej w obwodzie. Na początku należy zauważyć, że przez rezystor  $R$  przepływa prąd  $j$  o natężeniu 1 A, skutkując powstaniem na zaciskach rezystora napięcia  $u_R = 10 \text{ V}$ . W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, strzałka napięcia będzie skierowana w prawo.



Rysunek: Przykład 4.

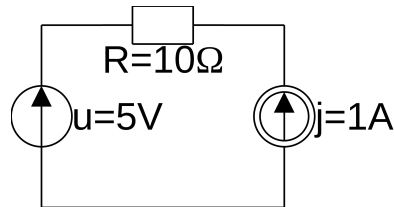
Wiedza ta pozwala zapisać równanie oczka:

$$u + u_R - u_j = 0.$$

Podstawiając wartości, otrzymujemy

$$u_j = 15 \text{ V}.$$

Znane są wszystkie wartości, co pozwala na wykonanie bilansu mocy.



Rysunek: Przykład 4.

Obliczone wartości pozwalają wykonać bilans mocy (sposób 1).

Moc dostarczona w obwodzie:

$$P_u = u \cdot (-j) = 5 \text{ V} \cdot (-1 \text{ A}) = -5 \text{ W},$$

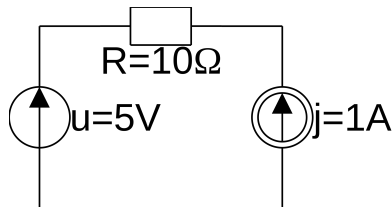
znak ujemny wynika z przeciwnego zwrotu strzałek napięcia i prądu (w tym ujęciu źródło napięciowe pobiera moc).

$$P_j = u_j \cdot j = 15 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 15 \text{ W}.$$

Moc oddawana w obwodzie:

$$P_R = u_R \cdot j = 10 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 10 \text{ W}.$$

Suma mocy dostarczonej:  $-5 \text{ W} + 15 \text{ W} = 10 \text{ W}$ , suma mocy oddawanej:  $10 \text{ W}$ .



Rysunek: Przykład 4.

Obliczone wartości pozwalają wykonać bilans mocy (sposób 2).

Moc dostarczona w obwodzie:

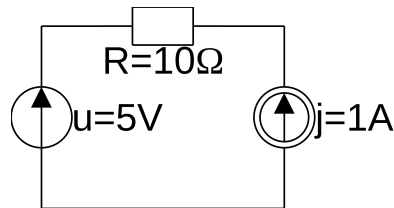
$$P_j = u_j \cdot j = 15 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 15 \text{ W}.$$

Moc oddawana w obwodzie:

$$P_u = u \cdot j = 5 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 5 \text{ W},$$

$$P_R = u_R \cdot j = 10 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 10 \text{ W}.$$

Suma mocy dostarczonej: 15 W, suma mocy oddawanej:  
 $5 \text{ W} + 10 \text{ W} = 15 \text{ W}$ . Oba podejścia są prawidłowe;  
praktycznie wygodniejsze jest pierwsze, bo zmniejsza ryzyko  
pomyłek przy ujemnych napięciach i prądach.



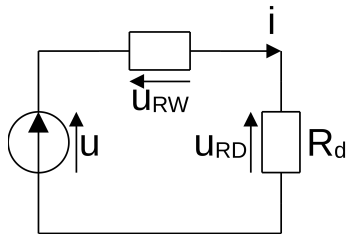
Rysunek: Przykład 4.



### Przykład 4 – symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Schemat po prawej przedstawia rzeczywiste źródło Thévenina z dołączonym odbiornikiem mocy. Rozważymy, jak zależy moc wydzielana na tym rezystorze (odbiorniku mocy) od wartości jego rezystancji.



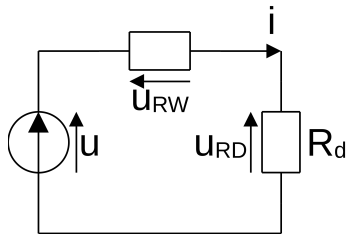
Rysunek: Optymalny pobór mocy.

Na podstawie dzielnika napięciowego można obliczyć, że napięcie na rezystorze  $R_d$  wynosi

$$u_d = u \frac{R_d}{R_w + R_d}.$$

Prąd tego rezystora to

$$i = \frac{u}{R_w + R_d}.$$

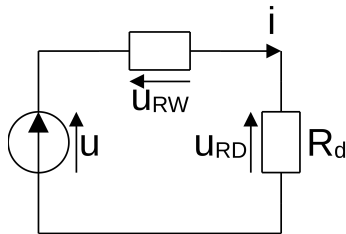


Rysunek: Optimalny pobór mocy.

Moc wydzielana na rezystorze  $R_d$  jest zależna od jego wartości i wynosi

$$P(R_d) = u_d \cdot i = \frac{u R_d}{R_w + R_d} \cdot \frac{u}{R_w + R_d} = \frac{u^2 R_d}{R_d^2 + 2R_d R_w + R_w^2}.$$

Aby wyznaczyć maksymalną moc, trzeba policzyć pochodną funkcji  $P(R_d)$  i przyrównać ją do zera.



Rysunek: Optimalny pobór mocy.

Różniczkując i upraszczając, otrzymujemy warunek ekstremum:

$$R_d^2 + 2R_dR_w + R_w^2 - R_d(2R_d + 2R_w) = 0,$$

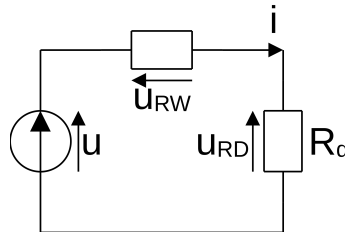
$$R_d^2 + 2R_dR_w + R_w^2 - 2R_d^2 - 2R_dR_w = 0,$$

$$R_w^2 - R_d^2 = 0.$$

Przyjmując, że rezystancje są dodatnie, dostajemy

$$R_d = R_w.$$

Maksymalna moc jest więc pobierana wtedy, gdy rezystancja obciążenia jest równa rezystancji wewnętrznej źródła.



Rysunek: Optymalny pobór mocy.

Symulacja działania optymalnego odbiornika

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Wykład 4

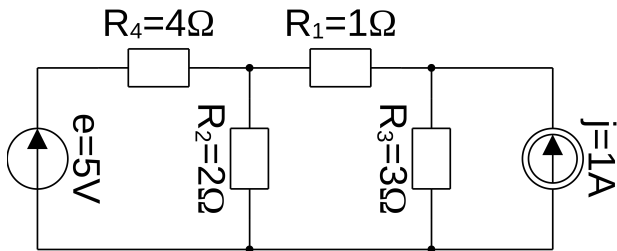
## Zasada superpozycji

Odpowiedź obwodu na jednoczesne działanie wielu źródeł (wymuszeń) jest równa sumie odpowiedzi na każde ze źródeł z osobna, przy wyzerowaniu pozostałych źródeł podczas każdej z tych analiz.

Jeśli w układzie liniowym kilka źródeł prądu lub napięcia działa jednocześnie, to prąd lub napięcie w dowolnej gałęzi można obliczyć jako sumę algebraiczną prądów lub napięć wywołanych osobno przez każde ze źródeł, przy czym pozostałe zastępuje się zwarciami (dla idealnych źródeł napięcia) lub rozwarciem (dla idealnych źródeł prądu).

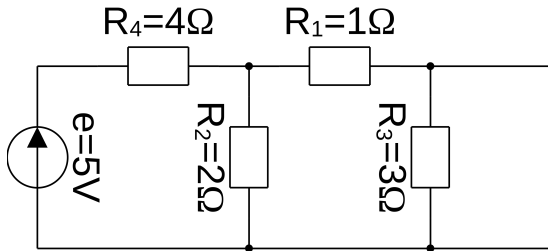


Przykładowe zadanie przedstawiono na rysunku po prawej stronie.



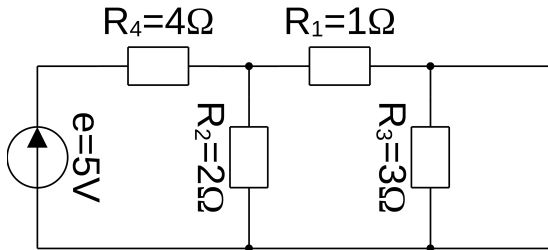
Rysunek: Przykładowe zadanie.

Pierwszą czynnością jest zastąpienie źródła prądowego rozwarciem. Pozostawia to prosty układ, w którym kolejne przekształcenia polegają na łączeniu rezystorów. Można zauważyć, że rezystory  $R_1$  i  $R_3$  połączone są szeregowo.



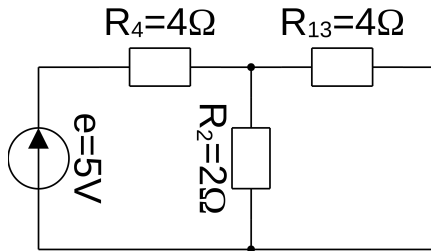
Rysunek: Przykładowe zadanie - rozwarcie w miejscu źródła prądowego.

Pierwszą czynnością jest zastąpienie źródła prądowego rozwarciem. Pozostawia to prosty układ, w którym kolejne przekształcenia polegają na łączeniu rezystorów. Można zauważyć, że rezystory  $R_1$  i  $R_3$  połączone są szeregowo, co można zastąpić rezystorem  $R_{13}$ .



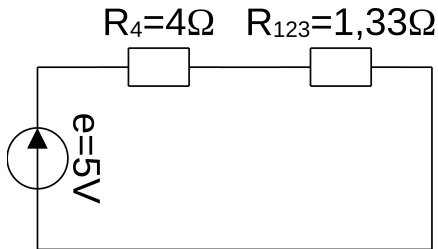
Rysunek: Przykładowe zadanie - rozwarcie w miejscu źródła prądowego.

Kolejnym krokiem rozwiązania może być równoległe połączenie rezystorów  $R_2$  i  $R_{13}$ , które zostaną zastąpione rezystorem  $R_{123}$ .



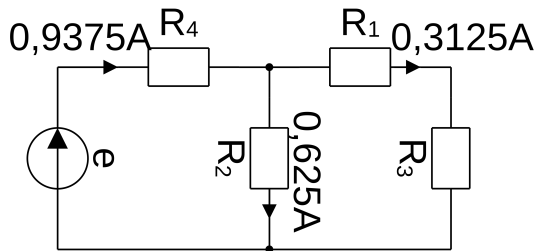
Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

Tak przygotowane zadanie jest już proste do rozwiązania. Można zauważyć, że przez źródło napięciowe przepływa prąd o natężeniu  $i_e = 0,938$  A. Oznacza to, że na rezystorze  $R_4$  odkłada się napięcie  $u_4 = 3,75$  V, a na rezystorze  $R_{123}$  napięcie 1,25 V. Odwracając zmiany wykonane w celu uzyskania rezystora  $R_{123}$  można odzyskać poszczególne napięcia i natężenia na rezystorach  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ .



Rysunek: Przykładowe zadanie - postępowanie w rozwiązaniu.

Wyniki prądów na poszczególnych rezystorach przedstawiono na schemacie po prawej. Dla przejrzystości napięcia rezystorów zostały pominięte.

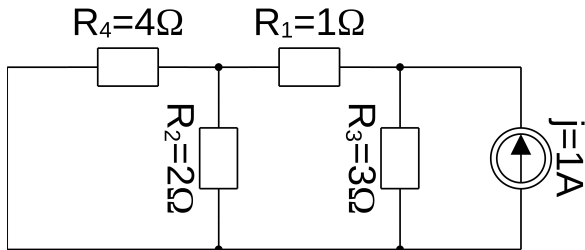


Rysunek: Przykładowe zadanie - postępowanie w rozwiązaniu.

Przykład - symulacja (wygaszone  
napięciowe)

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

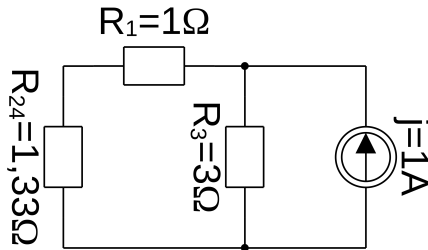
W drugiej części należy wyzerować źródło prądowe, zastępując je rozwarciem. Można zauważyć, że ponownie obwód można rozwiązać metodą łączenia rezystorów, co przedstawiono w kolejnych krokach. Na pierwszy rzut oka widać możliwe do połączenia rezystory  $R_2$  i  $R_4$ .



Rysunek: Przykładowe zadanie - postępowanie w rozwiązaniu.



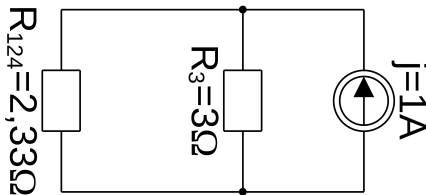
Po połączeniu w  $R_{24}$  można zauważyć, że jest on szeregowo połączony z rezystorem  $R_1$ , a ich połączenie jest wykonane w kolejnym kroku.



Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

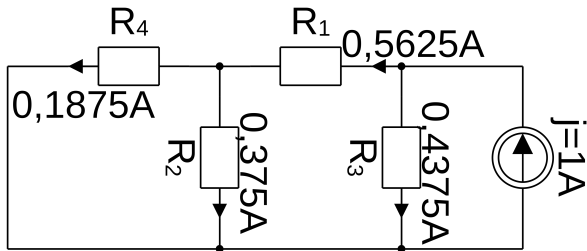
Pozostaje prosty układ ze źródłem prądowym i dwoma rezystorami  $R_3$  i  $R_{124}$ , których prądy można obliczyć, używając dzielnika prądowego.

Ponownie, odwracając poprzednie połączenia i licząc napięcia oraz natężenia, można uzyskać prądy i napięcia pierwotnych rezystorów.



Rysunek: Przykładowe zadanie - postępowanie w rozwiązaniu.

Wartości prądów przedstawiono na rysunku po prawej. Dla poprawy czytelności napięcia nie zostały wypisane.

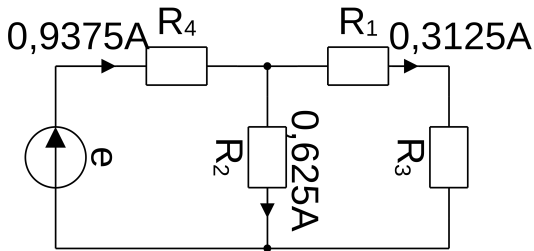


Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

Przykład - symulacja (wygaszone  
prądowe)

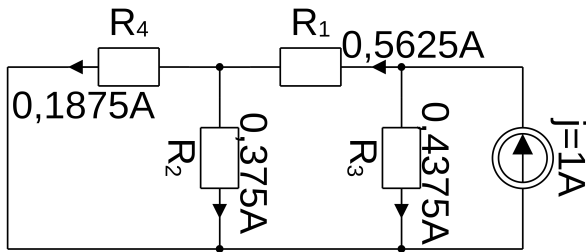
<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

Ostatnim krokiem zasady superpozycji jest połączenie prądów i napięć uzyskanych na poszczególnych elementach w poprzednich krokach.



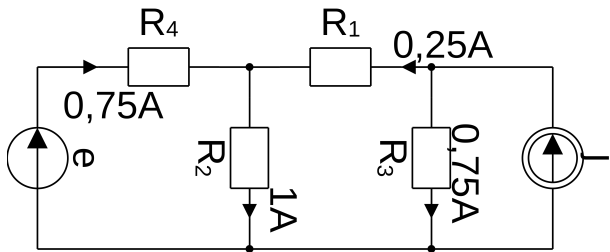
Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

Ostatnim krokiem zasady superpozycji jest połączenie prądów i napięć uzyskanych na poszczególnych elementach w poprzednich krokach.



Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

Ostatnim krokiem zasady superpozycji jest połączenie prądów i napięć uzyskanych na poszczególnych elementach w poprzednich krokach. Należy zwrócić uwagę, że prądy płynące w przeciwnych kierunkach się odejmują, a zgodne kierunki się dodają.



Rysunek: Przykładowe zadanie - postęp w rozwiązaniu.

### Przykład - pełna symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>



Metoda zamiany źródeł Thévenina / Nortona polega na zastępowaniu fragmentu złożonego, liniowego obwodu prostym „dwójnikiem” równoważnym, co bardzo ułatwia obliczenia prądów i napięć w wybranej gałęzi.

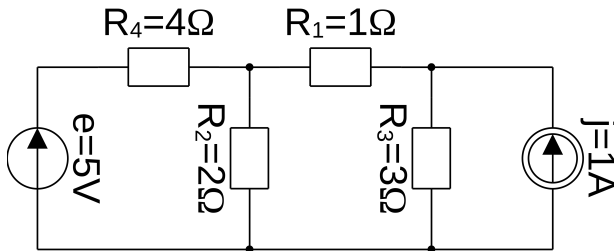
## Zamiana Thévenin - Norton

Gałąź: źródło napięcia  $e$  w szeregu z rezystancją  $R$  (Thévenin) można zamienić na równoważne źródło prądu  $j$  w równoległym połączeniu z tą samą rezystancją  $R$  (Norton), przy czym  $j = \frac{e}{R}$ .

Odwrotnie, źródło prądu  $j$  równolegle z rezystancją  $R$  można zastąpić źródłem napięcia  $e = jR$  w szeregu z tą samą rezystancją  $R$ , nie zmieniając prądów i napięć w dołączonej gałęzi A-B.

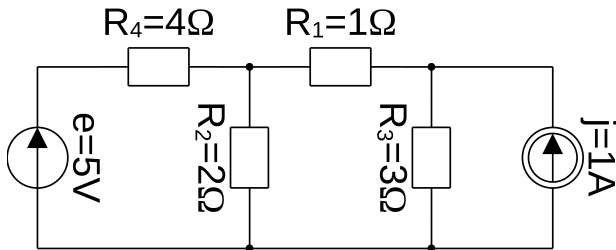
Przykładowe zadanie przedstawiono na rysunku po prawej stronie. Można zauważyć, że występuje w nim zarówno źródło Thevenina, jak i Nortona.

Przyjmijmy, że źródło Nortona pozostanie nieruszone, modyfikowane będzie źródło Thevenina. W pierwszym kroku można zamienić je na źródło Nortona o prądzie  $j_2 = \frac{e}{R_4} = 1,25 \text{ A}$ . Rezystancja wewnętrzna ( $R_4$ ) pozostaje bez zmian, jednak przechodzi w połączenie równoległe.



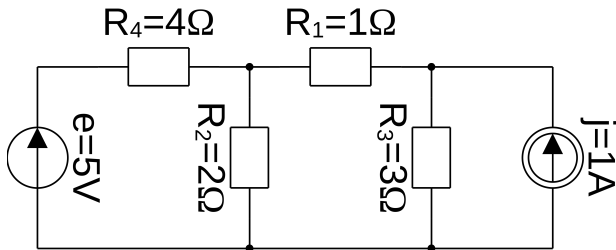
Rysunek: Przykładowe zadanie.

W efekcie powstaje połączenie równoległe rezystorów  $R_4$  i  $R_2$ , które można połączyć, co da rezystor  $R_{24}$  o wartości  $1,33\ \Omega$ . Powstanie również nowe źródło Nortona, które można zamienić w źródło Thevenina.



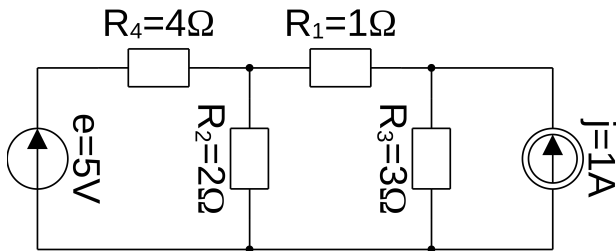
Rysunek: Przykładowe zadanie.

Będzie ono posiadało napięcie  $e_2 = 1,25 \text{ A} \cdot 1,33 \Omega = 1,667 \text{ V}$  i rezystancję wewnętrzną  $R_{24}$ , które będzie połączone szeregowo z rezystorem  $R_1$ . Oba rezystory można połączyć, tworząc rezystor  $R_{124}$  i ponownie zamieniając źródło.



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Ostatecznie w układzie pozostaną dwa równolegle połączone rezystory oraz dwa źródła prądowe. Rozwiązanie tego układu przy pomocy dzielnika prądowego nie powinno sprawić problemu; znając wartości prądu i napięcia na rezystorze  $R_3$  można wracać do wcześniejszych etapów przekształceń i odtwarzać wartości na poszczególnych elementach.



Rysunek: Przykładowe zadanie.

### Przykład - symulacja zamiany źródeł

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html>

## Wykład 5

## Równania węzłowe

Równania prądowe w obwodzie to równania, które zapisuje się na podstawie I prawa Kirchhoffa (prawa prądowego) w węzłach obwodu. Określają one, jak prądy „rozchodzą się” w rozgałęzieniach, zgodnie z zasadą zachowania ładunku.



## Istota równań prądowych

I prawo Kirchhoffa mówi, że suma prądów wpływających do węzła jest równa sumie prądów z niego wypływających, czyli ładunek w węźle nie może się gromadzić ani zniknąć.

W zapisie algebraicznym przyjmuje się znak „+” dla prądów wpływających i „-” dla wypływających, a równanie ma postać  $\sum i = 0 \text{ A}$  dla danego węzła.

## Jak je się zapisuje

Wybiera się węzły obwodu (punkty, gdzie łączą się co najmniej trzy gałęzie) i dla każdego z nich zapisuje się równanie, uwzględniając wszystkie prądy, które do niego dochodzą i z niego wychodzą. Dla prostego węzła z prądami  $i_1$ ,  $i_2$  wpływającymi i  $i_3$  wypływającym równanie prądowe będzie np.  $i_1 + i_2 - i_3 = 0$  A lub równoważnie  $i_1 + i_2 = i_3$ .

## Do czego służą

Zestaw równań prądowych (wraz z równaniami elementów, takimi jak prawo Ohma, oraz równaniami napięciowymi) pozwala obliczyć nieznane prądy w gałęziach obwodu.

Używa się ich w analizie zarówno prostych, jak i złożonych obwodów, zwłaszcza tam, gdzie występuje wiele rozgałęzień i trzeba wyznaczyć „rozptyw” prądu w całej sieci.

## Równania oczkowe

Równania oczkowe w obwodzie to równania, które zapisuje się na podstawie II prawa Kirchhoffa (prawa napięciowego) w oczkach obwodu. Opisują one zależności między spadkami napięć i źródłami napięcia w zamkniętych pętlach, zgodnie z zasadą zachowania energii.

## Istota równań oczkowych

II prawo Kirchhoffa mówi, że w każdym zamkniętym oczku suma przyrostów i spadków napięć jest równa zero.

W zapisie algebraicznym, przechodząc wzdłuż oczka, przyjmuje się odpowiednie znaki dla spadków napięć i źródeł, a równanie ma postać  $\sum u = 0 \text{ V}$  dla danego oczka.

## Jak je się zapisuje

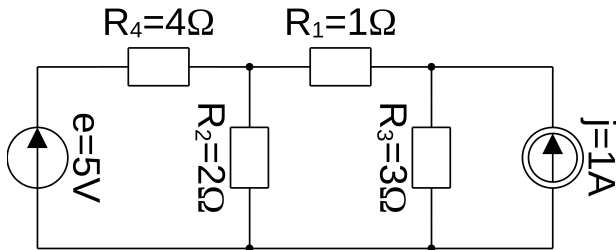
Wybiera się niezależne oczka obwodu (najmniejsze zamknięte pętle) i dla każdego z nich zapisuje się równanie, sumując spadki napięć na elementach oraz uwzględniając źródła napięcia.

Dla prostego oczka z rezystorami o spadkach  $u_1$ ,  $u_2$  i źródłem napięcia  $e$  równanie oczkowe może mieć postać  $-e + u_1 + u_2 = 0 \text{ V}$  lub równoważnie  $e = u_1 + u_2$ .

## Do czego służą

Zestaw równań oczkowych (wraz z prawem Ohma i zależnościami elementów) pozwala obliczyć nieznane prądy oczkowe, a następnie prądy w poszczególnych gałęziach obwodu. Metoda równań oczkowych jest szczególnie przydatna w obwodach płaskich z wieloma gałęziami, ponieważ umożliwia zmniejszenie liczby niewiadomych w porównaniu z metodą równań węzłowych.

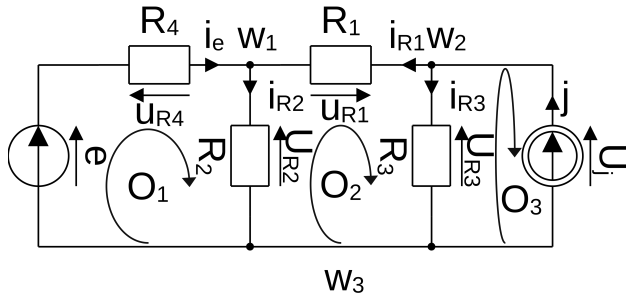
Po prawej stronie przedstawiono przykładowe zadanie. Zaznaczone na nim są wartości rezystorów, napięcie źródła  $e$  oraz prąd źródła  $j$ . Będzie ono stanowiło bazę do dalszych rozważań.



Rysunek: Przykładowe zadanie.

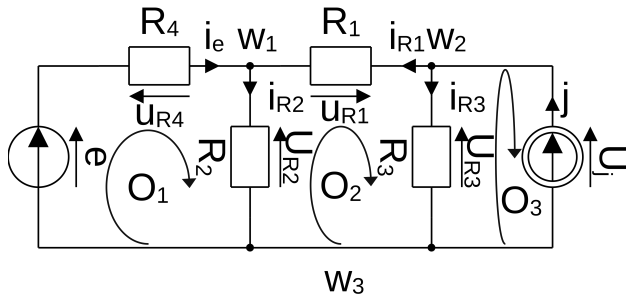


Na schemacie po prawej usunięto oznaczenia wartości, dodano za to prądy i napięcia na elementach, węzły oraz oczka.



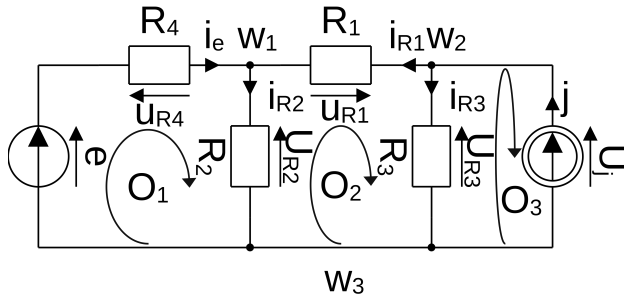
Rysunek: Przykładowe zadanie.

Na początku skupmy się na węzłach.  
Można zauważyć, że w obwodzie występują 4 węzły, jednak w rzeczywistości dwa dolne węzły stanowią jeden węzeł (oznaczony jako  $W_3$ ).  
Można sobie to wyobrazić jako utworzenie trójkąta z rezystorów  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ . Wtedy będzie dobrze widoczne, że na dole istnieje jeden wspólny węzeł.



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Strzałki prądowe oznaczone zostały w sposób dowolny; warto jednak przyjąć, że są one zgodne z kierunkowością źródeł. Na rezystorach można je oznaczać dowolnie. Istotne jest natomiast, aby strzałki napięć na rezystorach były skierowane przeciwnie do strzałek przepływających przez nie prądów. Jeśli „intuicyjnie” strzałka zostałaby narysowana odwrotnie, to w wyniku obliczeń pojawi się ujemny prąd lub napięcie (co nie jest problemem – moc nadal wyjdzie dodatnia).



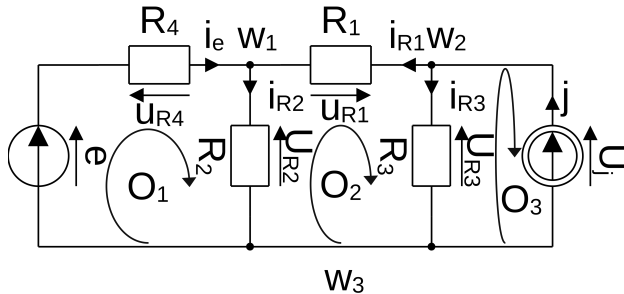
Rysunek: Przykładowe zadanie.

Równania węzłów:

$$w_1: i_e + i_{R1} - i_{R2} = 0$$

$$w_2: -i_{R1} - i_{R3} + j = 0$$

$$w_3: -i_e + i_{R2} + i_{R3} - j = 0$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

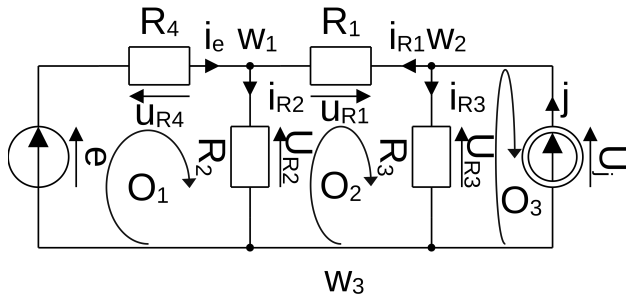
Równania węzłów:

$$w_1: i_e + i_{R1} - i_{R2} = 0$$

$$w_2: -i_{R1} - i_{R3} + j = 0$$

$$w_3: -i_e + i_{R2} + i_{R3} - j = 0$$

Można zauważyć, że suma trzech powyższych równań jest równa zero. Oznacza to, że są one liniowo zależne, czyli jedno z równań zawiera informację już obecną w pozostałych. Z tego powodu w układzie, w którym występuje  $N$  węzłów, używa się równań z dowolnych  $N - 1$  węzłów.



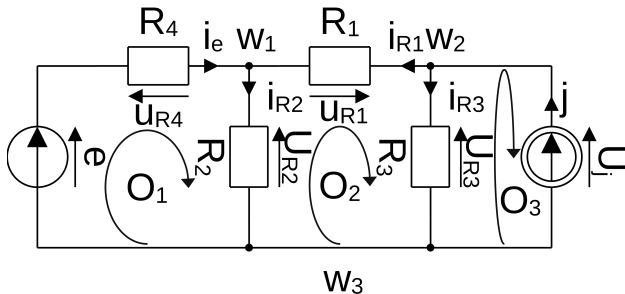
Rysunek: Przykładowe zadanie.

Dla wygody zapiszmy równania węzłów  
w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ j \end{bmatrix}$$

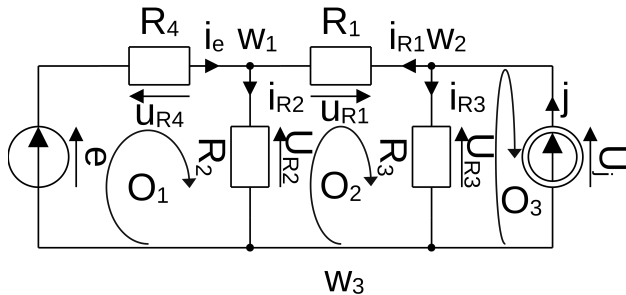
Bez nadmiarowego równania:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \end{bmatrix}$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Zajmijmy się teraz równaniami oczek. W układzie występują 3 proste oczka; ich równania układu się, korzystając z NPK. Na ogół przyjmuje się, że oczka „obracają się” zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara, jednak przyjęcie odwrotnego kierunku zmieni jedynie znaki, a rozwiązanie pozostanie identyczne.



Rysunek: Przykładowe zadanie.

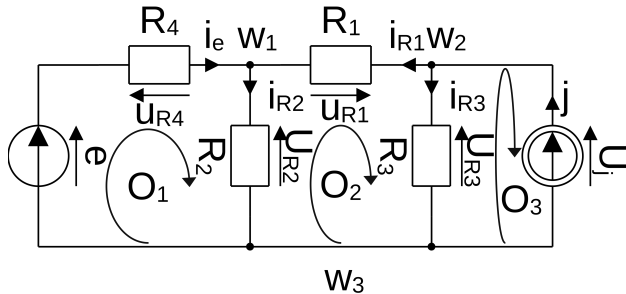
Równania oczek:

$$O_1: e - U_{R4} - U_{R2} = 0$$

$$O_2: U_{R2} + U_{R1} - U_{R3} = 0$$

$$O_3: U_{R3} - u_j = 0$$

W tym przypadku wszystkie równania są istotne. Można również budować oczka przekraczające elementy, np. połączone oczka  $O_1$  i  $O_2$ , jednak w ogólnym przypadku nie jest to konieczne.



Rysunek: Przykładowe zadanie.



Można zauważyć, że równania oczek oparte są o napięcia, które w przypadku rezystorów można wyrazić przez prądy:

$$U_{R1} = i_{R1} R_1$$

$$U_{R2} = i_{R2} R_2$$

$$U_{R3} = i_{R3} R_3$$

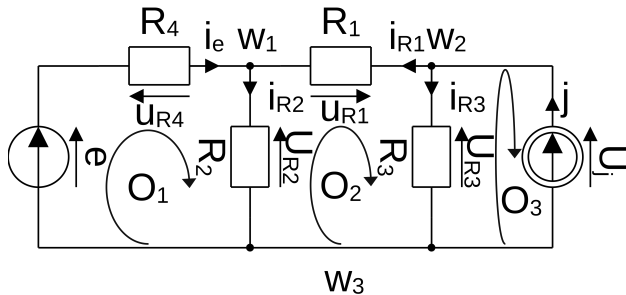
$$U_{R4} = i_e R_4$$

Co z kolei pozwala na modyfikację równań oczek:

$$O_1: e - i_e R_4 - i_{R2} R_2 = 0$$

$$O_2: i_{R2} R_2 + i_{R1} R_1 - i_{R3} R_3 = 0$$

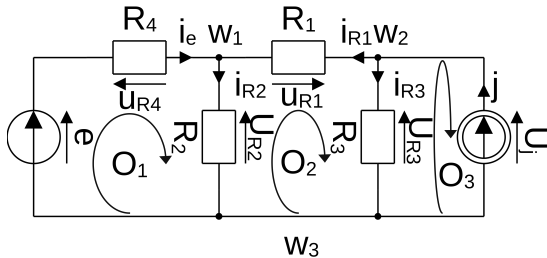
$$O_3: i_{R3} R_3 - u_j = 0$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Ponownie, równania można przedstawić w postaci macierzowej:

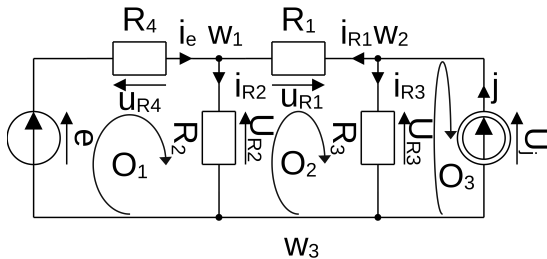
$$\begin{bmatrix} -R_4 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & R_2 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Łącząc równania uzyskane z węzłów i oczek,  
uzyskuje się równanie macierzowe postaci:

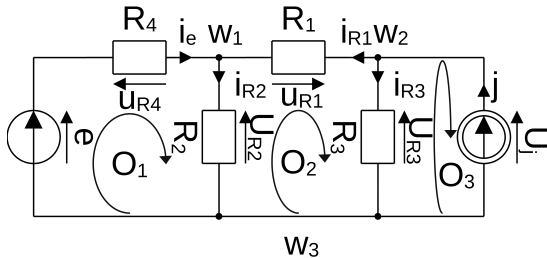
$$\begin{bmatrix} -R_4 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & R_2 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j \end{bmatrix}$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Równanie to posiada jednoznaczne rozwiązanie,  
które można wyznaczyć, wykonując operację:

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_4 & 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & R_2 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j \end{bmatrix}$$



Rysunek: Przykładowe zadanie.

Rozwiązanie tego typu równania można uzyskać dowolnym, ulubionym programem obliczającym równania macierzowe.

Macierz  $A$  w Matlabie:

```
1 >> A=[-4 0 -2 0 0; 0 1 2 -3 0; 0 0 0 3 -1; 1 1 -1 0 0; 0 -1 0 -1 0]
2 A =
3
4 -4      0      -2      0      0
5  0      1      2     -3      0
6  0      0      0      3     -1
7  1      1     -1      0      0
8  0     -1      0     -1      0
```

Wektor  $y$  w Matlabie:

```
1 >> y=[-5; 0; 0; 0; -1]
2 y =
3
4     -5
5      0
6      0
7      0
8     -1
```

Rozwiązanie równania:

```
1 >> A^-1*y
2 ans =
3
4     0.7500
5     0.2500
6     1.0000
7     0.7500
8     2.2500
```

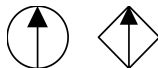
### Przykład - symulacja

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxE2xCQBYqEBTAWjDACgBLEGwmkFPHm69whSFHBsAThWyFR4tELBiJ7GUotyC+F8H1-kEoHwCHMyDvV3ChHUCLNgA3bUUg2K8JGnEkfShoBDYgA>



# Wykład 6

Sterowane źródła napięciowe to idealizowane elementy obwodu, które "wystawiają" na swoich zaciskach napięcie zależne od innego napięcia lub prądu w obwodzie, opisane równaniem typu  $u_{out} = k u_{ster}$  albo  $u_{out} = r i_{ster}$ .

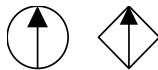


Rysunek: Źródła napięciowe - zwykłe i sterowane.

Sterowane źródło jest elementem czterozaciskowym: dwa zaciski wyjściowe, na których pojawia się napięcie źródła, oraz dwa zaciski sterujące, na których "mierzona" jest wielkość sterująca (napięcie lub prąd).

Wartość napięcia wyjściowego nie jest stała, lecz określona zależnością od wielkości sterującej, np. liniowo  $u_{out} = Au_{ster}$  (współczynnik  $A$  to wzmacnienie) lub ogólniej

$$u_{out} = f(u_{ster}, i_{ster}, t).$$

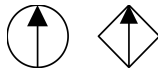


Rysunek: Źródła napięciowe - zwykłe i sterowane.

## Dwa typy źródeł napięciowych

Źródło napięcia sterowane napięciem (VCVS – Voltage Controlled Voltage Source): napięcie na wyjściu jest proporcjonalne do różnicy potencjałów między zaciskami sterującymi, np.  $u_{out} = k(u_C - u_D)$ .

Źródło napięcia sterowane prądem (CCVS – Current Controlled Voltage Source): napięcie na wyjściu jest proporcjonalne do prądu płynącego w wybranej gałęzi, np.  $u_{out} = Ri_x$ , gdzie  $i_x$  to prąd w gałęzi sterującej, a  $R$  ma wymiar rezystancji.

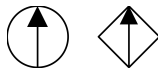


Rysunek: Źródła napięciowe - zwykłe i sterowane.

## Własności idealnego modelu

Idealne sterowane źródło napięciowe ma zerową rezystancję wewnętrzną na zaciskach wyjściowych, więc utrzymuje zadane napięcie niezależnie od pobieranego prądu (w granicach modelu matematycznego).

W modelu nie płynie także prąd przez zaciski sterujące (szczególnie dla VCVS), aby nie zaburzać obwodu, z którego "pobierana" jest informacja sterująca – kontrola ma charakter pomiaru idealnego.

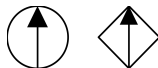


Rysunek: Źródła napięciowe - zwykłe i sterowane.

## Zastosowania w praktyce i analizie

Takie źródła służą do modelowania działania wzmacniaczy i elementów aktywnych: tranzystorów, wzmacniaczy operacyjnych, przetworników, gdzie sygnał wyjściowy jest funkcją sygnału wejściowego z pewnym wzmocnieniem lub przetwarzaniem.

W programach typu SPICE są podstawowym "klockiem" do budowy modeli bardziej złożonych układów (wzmacniacze, przetworniki, sprzężenia zwrotne), a w analizie teoretycznej pozwalają wygodnie rozwiązywać obwody z wzmocnieniem i nieliniowościami.



Rysunek: Źródła napięciowe - zwykłe i sterowane.

Sterowane źródła prądowe to idealizowane elementy obwodu, które "wymuszają" prąd w swojej gałęzi, przy czym wartość tego prądu zależy od innego napięcia albo prądu w obwodzie, opisanego równaniem typu  $i_{out} = g u_{ster}$  lub  $i_{out} = k i_{ster}$ .



Rysunek: Źródła prądowe - zwykłe i sterowane.

**Ogólna definicja** Sterowane źródło prądowe jest czterozaciskowe: dwa zaciski to wyjście, przez które płynie wymuszany prąd, a dwa kolejne to zaciski sterujące, na których "mierzona" jest wielkość sterująca (napięcie lub prąd). Wartość prądu wyjściowego nie jest stała, lecz wyznaczana zależnością od wielkości sterującej, najczęściej liniową, np.  $i_{out} = g u_{ster}$  (współczynnik  $g$  bywa nazywany transkonduktancją) lub  $i_{out} = k i_{ster}$ .



Rysunek: Źródła prądowe - zwykłe i sterowane.



## Dwa typy źródeł prądowych

Wśród sterowanych źródeł prądowych wyróżnia się:

Źródło prądu sterowane napięciem (VCCS – Voltage

Controlled Current Source): prąd wyjściowy jest

proporcjonalny do napięcia między zaciskami sterującymi, np.

$$i_{out} = g(u_C - u_D).$$

Źródło prądu sterowane prądem (CCCS – Current Controlled

Current Source): prąd wyjściowy jest proporcjonalny do prądu

płynącego w wskazanej gałęzi, np.  $i_{out} = ki_x$ .



Rysunek: Źródła prądowe - zwykłe i sterowane.

## Własności idealnego modelu

Idealne sterowane źródło prądowe ma nieskończenie dużą rezystancję wewnętrzną między zaciskami wyjściowymi, co oznacza, że stara się utrzymywać zadany prąd niezależnie od napięcia potrzebnego na swoich zaciskach (w granicach modelu). Zaciski sterujące nie powinny w idealnym modelu pobierać mocy ani zaburzać gałęzi, z której pochodzi sygnał sterujący – działają jak idealny czujnik napięcia lub prądu.



Rysunek: Źródła prądowe - zwykłe i sterowane.

## Zastosowania w praktyce i analizie

Takie źródła wykorzystuje się do modelowania tranzystorów, wzmacniaczy transkonduktancyjnych i wielu układów analogowych, w których prąd wyjściowy jest funkcją napięcia lub prądu wejściowego. W analizie teoretycznej oraz w symulacjach numerycznych pozwalają wygodnie opisać zachowanie układów wzmacniających, źródeł prądowych i układów ze sprzężeniem zwrotnym, traktując skomplikowane bloki jako proste zależności między gałęzią sterującą a prądowym wyjściem.



Rysunek: Źródła prądowe - zwykłe i sterowane.

Parametry:

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

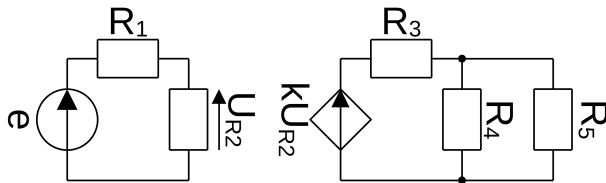
$$e = 12V$$

$$R_3 = 4\Omega$$

$$R_4 = 3\Omega$$

$$R_5 = 6\Omega$$

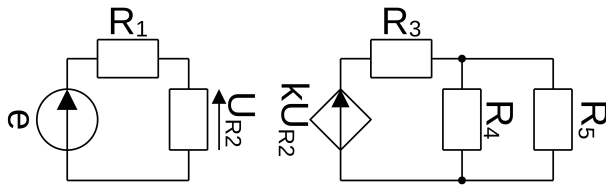
$$k = 3$$



Rysunek: [Zadanie 1](#)

W zadaniu występuje sterowane źródło napięciowe, jednak specyfika zadania sprawia że nie jest ono znacznym utrudnieniem.

Na początku można zauważyć odseparowaną część obwodu po lewej stronie. Znając wartości  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $e = 12V$ , można obliczyć napięcie sterujące  $U_{R2} = e \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 8V$ .

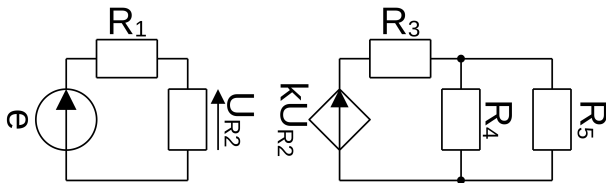


Rysunek: Zadanie 1

Napięcie na źródle sterowanym wynosi  
zatem  $kU_{R2} = 3 \cdot 8V = 24V$ .

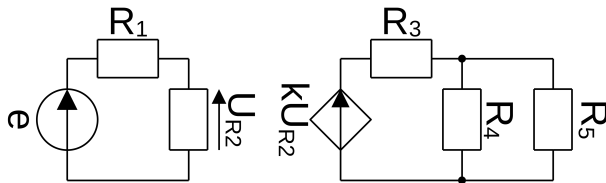
Następnym krokiem może być  
zastąpienie rezystancji  $R_4$  i  $R_5$  jedną  
rezystancją zastępczą  $R_Z$  o wartości

$$R_Z = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} \Omega = 2 \Omega.$$



Rysunek: Zadanie 1

Prąd płynący przez źródło sterowane jest zatem równy  $i_k = \frac{24V}{R_3+R_2} = \frac{24V}{4+2}A = 4A$ , co z kolei sprawia że na rezystorze  $R_3$  odkłada się napięcie  $4A \cdot R_3 = 16V$ . Na rezystorach  $R_4$  i  $R_5$  musi się odkładać zatem pozostałe  $8V$ , co sprawia że płynie przez nie prąd wynoszący odpowiednio  $i_{R4} = 2,667A$  i  $i_{R5} = 1,333A$



Rysunek: Zadanie 1

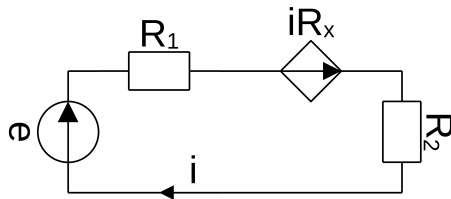
Parametry:

$$e = 12V$$

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

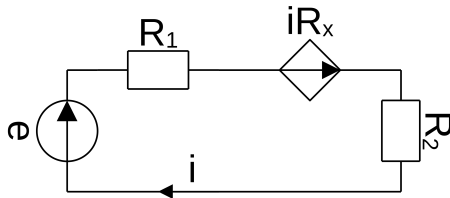
$$R_x = 18\Omega$$



Rysunek: [Zadanie 2](#)



W tym przypadku sytuacja jest nieco bardziej złożona, napięcie źródła sterowanego jest zależne od przepływającego przez nie prądu. Zadania to nadal pozostaje jednak względnie proste, ze względu na brak węzłów i występowanie tylko jednego oczka napięciowego.



Rysunek: Zadanie 2

Równanie oczka:

$$e - U_{R1} + iR_x - U_{R2} = 0V$$

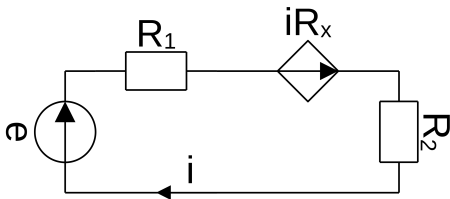
Napięcia na rezystorach można zapisać  
z wykorzystaniem prądu  $i$  i ich  
rezystancji:

$$e - iR_1 + iR_x - iR_2 = 0V$$

$$i(R_1 - R_x + R_2) = e$$

Prąd w obwodzie jest zatem równy:

$$i = \frac{e}{R_1 + R_2 - R_x} = \frac{12V}{10\Omega + 20\Omega - 18\Omega} = 1A.$$



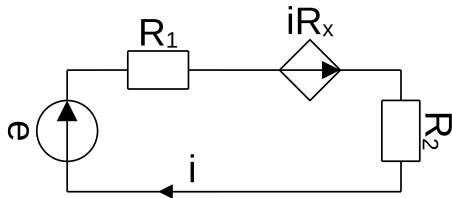
Rysunek: Zadanie 2

Znajomość prądu  $i = 1A$  pozwala na  
wyznaczenie brakujących napięć:

$$U_{R1} = iR_1 = 10V$$

$$U_{R2} = iR_2 = 20V$$

$$iR_x = 18V$$



Rysunek: [Zadanie 2](#)

Parametry:

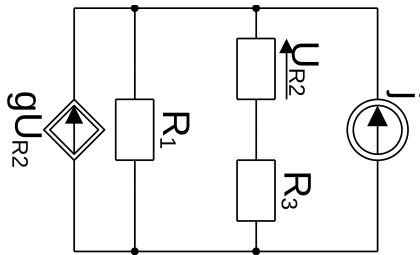
$$j = 10mA$$

$$R_1 = 1k\Omega$$

$$R_2 = 1k\Omega$$

$$R_3 = 3k\Omega$$

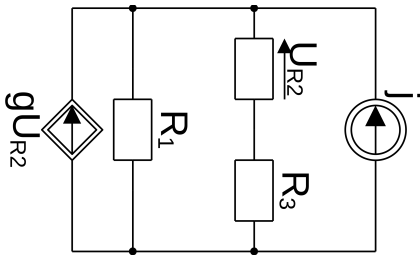
$$g = 4mS$$



Rysunek: Zadanie 3

Nieco bardziej złożone zadanie z sterowanym źródłem prądowym. Całość upraszcza jednak występowanie tylko dwóch węzłów. Ich równania będą identyczne, z tego powodu wystarczy skupić się na jednym z nich, którego równanie będzie miało postać:

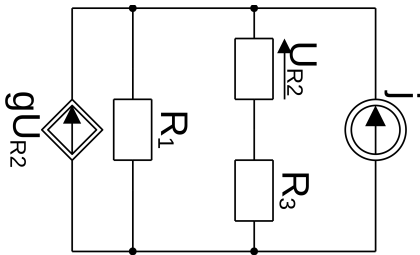
$$gU_{R2} + j - i_{R1} - i_{R2} = 0A$$



Rysunek: Zadanie 3

Bazując na równaniu dzielnika prądowego, można zauważyć, że prąd  $i_{R2}$  będzie równy:

$$i_{R2} = (j + gU_{R2}) \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 0.2(j + gU_{R2})A$$



Rysunek: Zadanie 3

Oznacza to że napięcie  $U_{R2}$  wynosi:

$$U_{R2} = i_{R2}R_2 = 0.2R_2(j + gU_{R2})$$

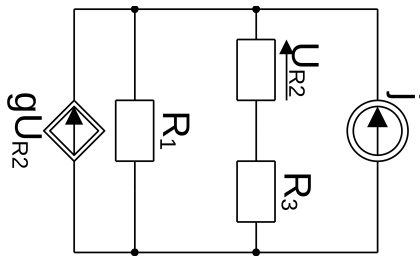
Równanie to można przekształcić do

$$\text{postaci: } U_{R2} = 0.2R_2j + 0.2R_2gU_{R2}$$

$$U_{R2} - 0.2R_2gU_{R2} = 0.2R_2j$$

$$U_{R2}(1 - 0.2R_2g) = 0.2R_2j$$

$$U_{R2} = \frac{0.2R_2j}{1 - 0.2R_2g} = 10V$$



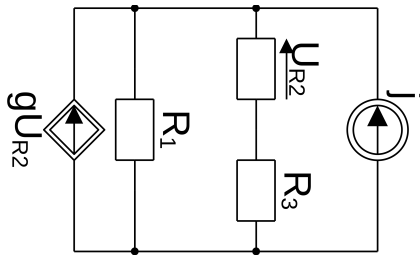
Rysunek: Zadanie 3

Dalej można obliczyć:

$$gU_{R2} = 0.004S * 10V = 40mA$$

$$i_{R1} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} * (40mA + 10mA) = 40mA$$

$$U_{R1} = R_1 \cdot 40mA = 40V$$



Rysunek: Zadanie 3



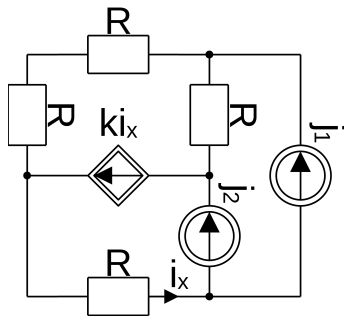
Parametry:

$$j_1 = 10mA$$

$$j_2 = 30mA$$

$$R = 1k\Omega$$

$$k = 5$$



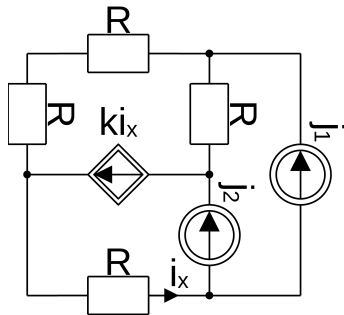
Rysunek: [Zadanie 4](#)

Pozornie złożony układ: 3 oczka, 4 węzły. Klasyczne podejście wymagałoby ułożenia 6 równań (3 węzłowe, 3 oczkowe) i wykonania operacji na macierzach  $6 \times 6$ . Można jednak zauważyć, że dolny węzeł posiada proste równanie:

$$i_x - j_2 - j_1 = 0A$$

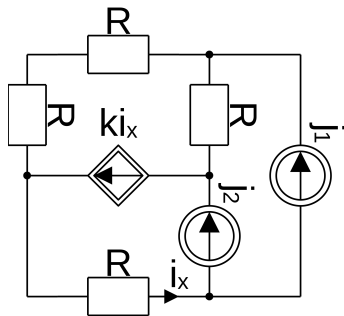
$i_x = 40mA$ , co z kolei pozwala wyznaczyć wydajność sterowanego źródła prądowego jako:

$$ki_x = 5 \cdot 40mA = 200mA.$$



Rysunek: Zadanie 4

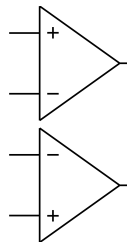
Znając tę wartość i wykorzystując równania węzłów można w prosty sposób uzyskać napięcia na każdym z elementów obwodu.



Rysunek: [Zadanie 4](#)

# Wykład 7

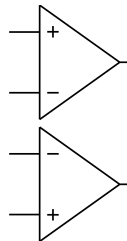
Wzmacniacz operacyjny to scalony wzmacniacz różnicowy o bardzo dużym wzmocnieniu napięciowym, który prawie zawsze pracuje ze sprzężeniem zwrotnym (ujemnym lub dodatnim). Jest podstawowym blokiem elektroniki analogowej do budowania szerokiej gamy układów elektronicznych i wygodnym narzędziem do realizacji operacji matematycznych na sygnałach analogowych.



Rysunek: Dwa wzmacniacze operacyjne.

## Budowa wewnętrzna

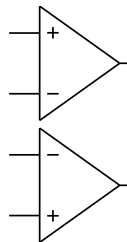
Wzmacniacz operacyjny posiada wejście różnicowe z dwoma terminalami: nieodwracającym (+) i odwracającym (-), wzmacniacz różnicowy o bardzo dużym wzmocnieniu otwartopętlowym ( $A_0$ ), stopień wyjściowy o niskiej impedancji oraz zasilanie dwupolarne (dodatnie i ujemne napięcie zasilania).



Rysunek: Dwa wzmacniacze operacyjne.

## Symbol i zaciski

Na schemacie wzmacniacz operacyjny jest reprezentowany jako trójkąt zwrócony wierzchołkiem w prawo. Ma dwa zaciski wejściowe z lewej: plus (nieodwracający) i minus (odwracający), jeden zacisk wyjściowy po prawej stronie (wierzchołek), zaciski zasilania:  $+V$  (dodatnie) i  $-V$  (ujemne), a czasami dodatkowe zaciski do kalibracji offsetu i stabilizacji.



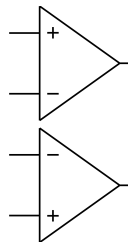
Rysunek: Dwa wzmacniacze operacyjne.

## Sprężenie zwrotne – kluczowa koncepcja

Bez sprzężenia zwrotnego wzmocnienie otwartopętlowe ( $A_0$ ) jest w praktyce nieprzydatne i bardzo niestabilne.

Ze sprzężeniem ujemnym kontrolowane wzmocnienie zamkniętopętlowe zależy od elementów zewnętrznych. Ze sprzężeniem dodatnim otrzymujemy oscylatory, komparatory i generatory funkcji.

W praktyce wzmacniacz operacyjny niemal zawsze pracuje z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.



Rysunek: Dwa wzmacniacze operacyjne.

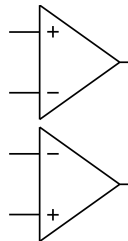


## Zastosowania praktyczne

Wzmacniacz operacyjny jest stosowany w przetwarzaniu sygnałów: wzmacnianiu, filtrowaniu i porównywaniu.

Wykorzystuje się go do realizacji operacji matematycznych: dodawania, odejmowania, całkowania i różniczkowania.

Znajduje zastosowanie w zasilaczach do stabilizacji napięcia i prądu, w układach audio do wzmacniania sygnałów z mikrofonów, kontroli głośności i korekcji barwy oraz w miernictwie – do pomiarów prądu fotodiod, w przetwornikach pomiarowych i wielu innych zastosowaniach.



Rysunek: Dwa wzmacniacze operacyjne.

## Wzmacniacz operacyjny jako komparator

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

[CQAgjCAMB0l3BWcMBsBmALAJhQdgWgJwAcYKCFICkVVNCApgLRhgBQAhiFgitxjTTEM-GsXBIWSMPHggOIETNlswuLN](https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB0l3BWcMBsBmALAJhQdgWgJwAcYKCFICkVVNCApgLRhgBQAhiFgitxjTTEM-GsXBIWSMPHggOIETNlswuLN)

## Proste sprzężenie zwrotne

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

[CQAgjCAMB0l3BWcZYA4BsB2ATNzZsEB0VA9EBSCiqhAUwFowwAoAQ3C03E3IGZsVMLxCpwSJkjDx4IPtGxE1WeAKVFO-](https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB0l3BWcZYA4BsB2ATNzZsEB0VA9EBSCiqhAUwFowwAoAQ3C03E3IGZsVMLxCpwSJkjDx4IPtGxE1WeAKVFO-)

## Wzmacniacz odwracający

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

CQAgjCAMB0l3BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAXKQUgoFMBaMMAKADcRjCQUFuvwYFFHAgALLSS1p0BCwDmnbr37dcYkZ  
DEbs2bmBsjccFgHcQdh06+

XhWj0NjAytHDQC-aw0g8AxuCIEVSKSImLQ8ZL4oFgBDSJjfgIywJCYkM3g4EAYYSrjCLGxiBDwcIUpw5EqWAHlPe0iJW

## Wzmacniacz nieodwracający

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

CQAgjCAMB0l3BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAxKQUgoFMBaMMAKADcRjCQUFuvwYFFHAgALLSS1p0BCwDmnbr37dcYkZ  
xMy1K1dAWZh0sFhJqtW7owylgB5YszhCVp26RYAexEgkQliIylYeDJCP14RTvTpxznaBaMOKBXQvo3XcBYgA

## Wtórnik

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

CQAgjCAMB0l3BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAxKQUgoFMBaMMAKADcRjCQUUAWTtzy1aEPrSQio0BCwDmgnv0WYUUKCw

GBGgIxHhcCEZq3r7+JJAYfPrMBMgeWiB2oo7pJhraXCDCVvkiqeFFhWB8piXGvAJZtRoA8mm+

DrR8dm3qZtpZYJmt-cUATi0CQ2PZovDykw3YrardLAD26oSmXpDBFNIEZIqIhCiSP0rYq-kgG+ri05Kw8AdHJ+

DgLEA

## Układ odejmujący

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAxKQUgoFMBaMMAKAEMQU89xiUQALNn5g+

IHmCRMkYePBAMU0BChXE8GQgLACuebFKUqEuDYWzFd3DDLmQWAd07dwYfnvCaojwcN78hETdvACdnCWDA135aWTgWMNE

wBzcM58stwBQvsslxz-TnxCuPsAJUa08C5olpBCWiRaYeUWAHlfETEBYgKkmpYAN0aGt1zm2hE0cBqoUY61pp5Zo76B1

dUC4YXSx4r5qoWAe3F+6toAkg6hA5BgkFUhX4PGwLF+wS0hSBILBsHgZEI+

UhsThIGI-yRwNyyj2chQAm0QMikIgrCAA

## Układ sumujący

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=>

CQAgjCAMB0l3BWcA2aYDMZIA5nrzgEzYCcICA70eZOQKYC0YYAUAIYjHac4gAs6Qj27cwSJkizw4IBjGmEcYP0myQ+

CEgmyYqtKfBYB3TtlHFTokkMjH+

g4faFgLtgE6XwFgc9fhDJlychHyehBQ2LADmYRGe60pQUHZBYNacfPrptoGZ40kh+

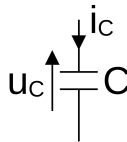
si00RlZQoXBoe5lKP0UyHVJBiveYA1VtYQhzYYASuAdyvoWw808tEglUNAILAPtjd2hLtzLSRW0NkkwcwDyTo58JEu8.



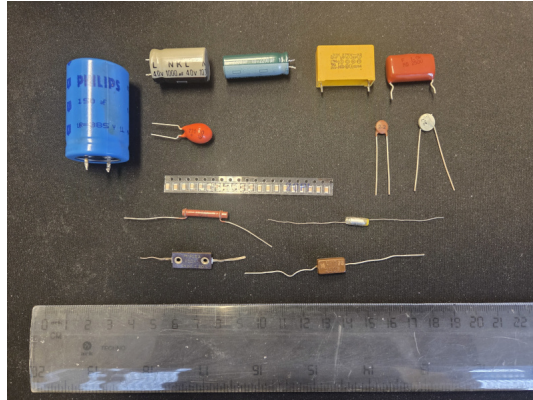
## Wykład 8

- Element elektroniczny inercyjny to element, dla którego płynący prąd chwilowy zależy nie tylko od chwilowego napięcia, ale także od przebiegu tego napięcia w przeszłości.
- Elementy inercyjne mają zdolność gromadzenia energii.
- Są nimi kondensatory i cewki indukcyjne.

- Element przechowujący energię w postaci pola elektrycznego.
- W najprostszej postaci składa się z dwóch okładzin przedzielonych dielektrykiem.
- Z perspektywy napięcia stałego stanowi przerwę w obwodzie.



Rysunek: Symbol kondensatora.



Rysunek: Przykładowe kondensatory.

Równanie kondensatora:

$$q_C = C \cdot u_C$$

- $q_C$  - ładunek kondensatora w kulombach [ $C = A \cdot s$ ]
- $C$  - pojemność kondensatora w faradach [ $F = C/V$ ]
- $u_C$  - spadek napięcia na kondensatorze w woltach [ $V$ ]

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$E_C(t_0; t) = \frac{C}{2} (u_C^2(t) - u_C^2(t_0))$$

Dla często używanego przypadku odniesienia  $u_C(t_0) = 0$  energia zgromadzona w kondensatorze ma postać  $E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ .

Symulacja 1:

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxEQCQBZsqBTAWjDACgB3Cl8an7BC149IHLjxQJCIAUMnTRAS3EUpKsHyuWsjgosSBBhw2AexkhCIkNUilzYKZPDQFFB9isQA>

Symulacja 2:

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAUgpABZsKBTAWjDACgBjEFFFgkbbIW69uNK1Qgw4k2JHYB1YX15UefMDTm+mRJRpaLibLEVThXpztDsQA>

Połączenie równoległe kondensatorów:

$$C_Z = \sum_{n=1}^N C_n$$

Połączenie szeregowe kondensatorów:

$$\frac{1}{C_Z} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}$$

## Jak to działa, że przez przerwę w obwodzie płynie prąd?

Przez kondensator nie płynie prąd w taki sposób jak przez zwykły przewód, mimo że między jego okładkami jest przerwa. Dzieje się tak dlatego, że kondensator gromadzi i oddaje ładunek na swoich dwóch metalowych okładkach oddzielonych izolatorem, a prąd w obwodzie jest związany ze zmianą tego ładunku w czasie.

### Co to znaczy „przerwa”

W środku kondensatora jest izolator, więc elektrony nie przeskakują z jednej okładki na drugą - gdy napięcie jest stałe i nic się nie zmienia, prąd ustaje, jak przy zwykłej przerwie w obwodzie.

Dlatego w stanie ustalonym dla prądu stałego kondensator zachowuje się jak przerwa: po naładowaniu prąd już nie płynie.



## Skąd więc bierze się prąd

Kiedy napięcie na kondensatorze zaczyna się zmieniać (np. w chwili podłączenia baterii albo przy prądzie zmiennym), na jednej okładce gromadzi się dodatkowy ładunek, a z drugiej tyle samo ładunku „ucieka” do reszty obwodu.

Ta zmiana ilości ładunku powoduje przepływ prądu w przewodach doprowadzających, choć sam izolator między okładkami wciąż niczego nie przewodzi.

## Jak to opisać prostymi słowami

Można wyobrazić sobie dwie metalowe płytki oddzielone cienką szybą: nie ma przejścia, ale jeśli na jedną płytkę doprowadzimy dodatni ładunek, to z drugiej płytki odepchniemy dodatni ładunek do obwodu - prąd w przewodach popłynie „dookoła”, bez skakania przez szybę.

Im szybciej zmienia się napięcie (szybciej ładujemy lub rozładowujemy kondensator), tym większy prąd pojawia się w obwodzie; jeśli napięcie przestaje się zmieniać, prąd spada do zera.

## Dlaczego przy prądzie zmiennym to działa ciągle

Przy prądzie przemiennym napięcie stale rośnie i maleje, więc kondensator jest cały czas naładowywany i rozładowywany, a prąd w obwodzie nieustannie płynie.

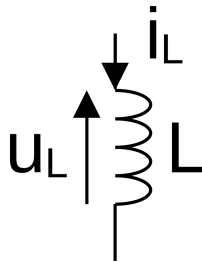
Dla bardzo wolnych zmian (prawie prąd stały) kondensator „prawie” odcina prąd, a dla szybkich zmian (wysoka częstotliwość) zachowuje się prawie jak zwykły przewodnik, ponieważ jego impedancja

$|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$  staje się bardzo mała.

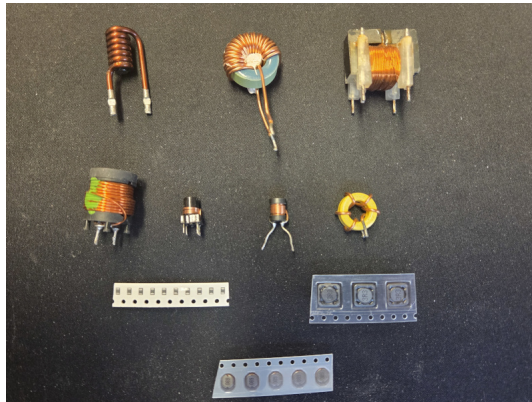
## Zastosowania

- Wygładzanie tętnień w zasilaczach.
- Odsprężanie i stabilizacja zasilania układów scalonych.
- Filtry sygnałowe (dolno-, górno- i pasmowo-przepustowe).
- Sprzęganie stopni wzmacniaczy (przekazywanie składowej zmiennej sygnału).
- Krótkotrwałe magazynowanie energii i podtrzymanie zasilania.
- Superkondensatory w systemach odzyskiwania energii i pojazdach elektrycznych.
- Kondensatory rozruchowe i pracy w silnikach jednofazowych.
- Kompensacja mocy biernej w sieciach elektroenergetycznych.
- Obwody rezonansowe i generatory częstotliwości.
- Czujniki pojemnościowe (dotykowe, zbliżeniowe, pomiar poziomu cieczy).

- Element przechowujący energię w postaci pola magnetycznego.
- W najprostszej postaci składa się ze spirali uformowanej z przewodnika.
- Z perspektywy prądu stałego stanowi zwarcie w obwodzie.



Rysunek: Symbol cewki.



Rysunek: Przykładowe cewki.

Równanie cewki:

$$\phi_L = L \cdot i_L$$

- $\phi_L$  - strumień indukcji magnetycznej w weberach [ $Wb = V \cdot s$ ]
- $L$  - indukcyjność magnetyczna w henrach [ $H = Wb/A$ ]
- $i_L$  - prąd induktora w amperach [ $A$ ]

$$u_L(t) = \frac{d\phi_L(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$E_L(t_0; t) = \frac{1}{2} (i_L^2(t) - i_L^2(t_0))$$

Dla przypadku odniesienia  $i_L(t_0) = 0$  otrzymujemy dobrze znaną postać energii zgromadzonej w cewce:  $E_L = \frac{1}{2} L i_L^2$ .

Symulacja 1:

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxEqCQBZsqBTAWjDACgB3Cl8an7BCl49IHLjxQJCIAUMnTRAN3EUpKsHy>

Symulacja 2:

<https://www.falstad.com/circuit/circuitjs.html?ctz=CQAgjCAMB013BWcMBMcUHYMGZIA4UA2ATmIxAUgpABZsKBTAWjDACgB1EFFG7mqjz5gafKlQBmAQwA2AZwZRubAG7gUe>

Połączenie równoległe cewek:

$$\frac{1}{L_Z} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n}$$

Połączenie szeregowe cewek:

$$L_Z = \sum_{n=1}^N L_n$$



## **Jak to działa, że na zwiniętym kawałku przewodnika pojawia się napięcie?**

Na zwiniętym kawałku przewodnika pojawia się napięcie dlatego, że zmieniający się prąd wytwarza zmienne pole magnetyczne, a to z kolei „przecina” zwoje cewki i wymusza w nich napięcie - to zjawisko opisuje prawo indukcji Faradaya, a kierunek napięcia określa prawo Lenza.

Gdy przez cewkę zaczyna płynąć prąd lub jego wartość się zmienia, wokół drutu powstaje i zmienia się pole magnetyczne.

Zmiana tego pola powoduje powstanie siły elektromotorycznej (napięcia) w samym przewodniku; napięcie ma taki kierunek, aby sprzeciwiać się zmianie prądu (prawo Lenza).

Im więcej zwojów ma cewka i im szybciej zmienia się prąd, tym większe napięcie się na niej pojawia.

## Zastosowania

- Filtry sygnałowe (dolno-, górno- i pasmowo-przepustowe).
- Dławiki w zasilaczach do tłumienia zakłóceń i tętnień prądu.
- Obwody rezonansowe LC w generatorach i odbiornikach radiowych.
- Transformatory i przekładniki prądowe oraz napięciowe.
- Cewki w przetwornicach impulsowych (magazynowanie energii w polu magnetycznym).
- Elektromagnesy, przekaźniki i cewki styczników.
- Zapłonowe cewki wysokiego napięcia w silnikach spalinowych.
- Cewki odchylające i korekcyjne w urządzeniach wizyjnych.
- Cewki w układach filtrów przeciwzakłóceń EMI.
- Indukcyjne czujniki zbliżeniowe i detektory metalu.

## Kondensator

- Rozwarcie dla napięcia stałego
- Prąd == pochodna napięcia
- Napięcie == całka prądu

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

## Cewka

- Zwarcie dla prądu stałego
- Prąd == całka napięcia
- Napięcie == pochodna prądu

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

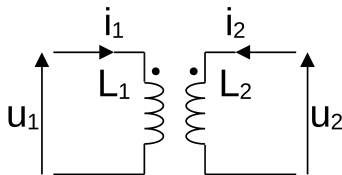
$$E_L = \frac{1}{2} L i_L^2$$

- $M$  - wzajemna indukcyjność magnetyczna
- $k$  - stała konstrukcyjna, zwykle  $0 \leq k \leq 1$ , dla idealnego sprzężenia  $k \approx 1$

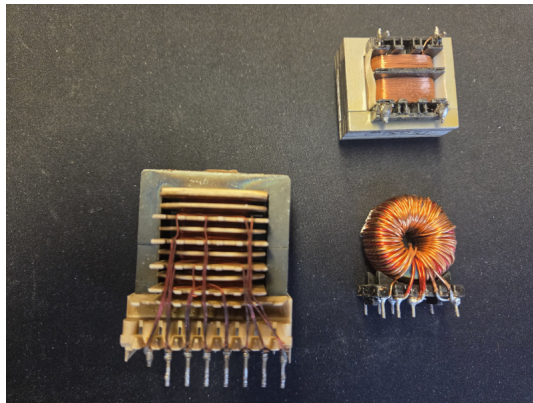
$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$



Rysunek: Symbol transformatora.



Rysunek: Przykładowe transformatory.

## Zastosowania

- Dopasowanie poziomów napięcia między siecią energetyczną a urządzeniami odbiorczymi (przekładnia napięciowa zależna od stosunku liczby zwojów  $n = N_1/N_2$ ).
- Separacja galwaniczna obwodów dla bezpieczeństwa i redukcji zakłóceń.
- Transformatory sieciowe w zasilaczach urządzeń elektronicznych.
- Transformatory mocy w liniach przesyłowych wysokiego i niskiego napięcia.
- Przekładniki prądowe i napięciowe do pomiarów i zabezpieczeń.
- Transformatory impulsowe w przetwornicach z izolacją galwaniczną.
- Transformatory audio do dopasowania impedancji i separacji sygnału.
- Transformatory w układach lampowych oraz wzmacniaczach mocy.
- Transformatory w zasilaczach bezprzerwowych UPS i systemach zasilania awaryjnego.
- Miniaturowe transformatory w układach komunikacyjnych (np. Ethernet, interfejsy telekomunikacyjne).

## Wykład 9

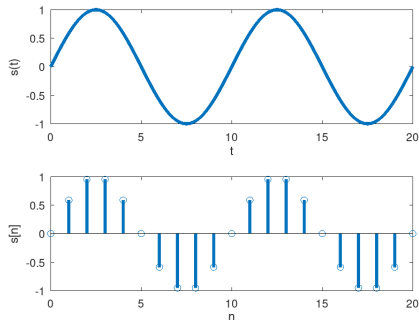
**Sygnał - przebieg fizyczny niosący informację, będący funkcją czasu.**

**Sygnały dzielimy na:**

- Deterministyczne - znamy ich dokładne wartości (np. sygnał z generatora - znamy amplitudę i fazę, sygnał jest zdeterminowany). Tylko takimi sygnałami będziemy zajmować się w tej części wykładu.
- Stochastyczne - nie znamy dokładnych wartości, ale znamy ich własności statystyczne i wartości mogą zostać przewidziane w sensie probabilistycznym (np. jutrzejsza temperatura).



- Sygnał czasu ciągłego: sygnał, który ma zdefiniowaną wartość dla każdej chwili czasu (funkcja  $x(t)$  o dziedzinie ciągłej).
- Sygnał czasu nieciągłego (dyskretnego): sygnał, który ma zdefiniowaną wartość tylko w wybranych, najczęściej równomiernie rozmieszczonych chwilach czasu (ciąg próbek  $x[n]$ ).



Rysunek: Przykłady sygnału ciągłego i nieciągłego.

- Sygnał przyczynowy to taki sygnał, który przed ustaloną chwilą odniesienia (zwykle czasem zero) ma wszędzie wartości równe zeru.
- Sygnał nieprzyczynowy to sygnał, który ma jakieś niezerowe wartości już przed tą chwilą odniesienia.

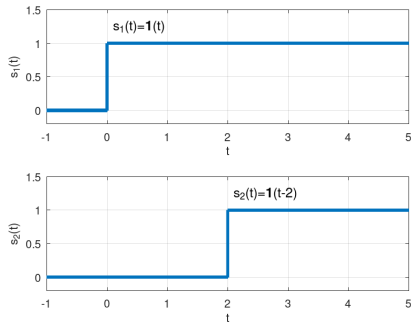
- Sygnały okresowe:  $x(t) = x(t + T)$  dla pewnego dodatniego okresu  $T$ .
- Prawie okresowe - ich kształt powtarza się w przybliżeniu, a nie co do punktu.
- Pozaokresowe - nie spełniają warunku okresowości.

- Jedyńska Heaviside'a (skok jednostkowy) -  $\mathbf{1}(t) = 0.5(1 + \text{sgn}(t))$
- Impuls Diraca (impuls jednostkowy) -  $\delta(t)$

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

Możliwa jest dowolna definicja wartości w punkcie  $t = 0$  (np.  $\mathbf{1}(0) = 0$ ,  $\mathbf{1}(0) = 1$  lub  $\mathbf{1}(0) = 0,5$ ) - w większości zastosowań nie ma to znaczenia.

$$\mathbf{1}(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < a, \\ 1 & \text{dla } t > a \end{cases}$$

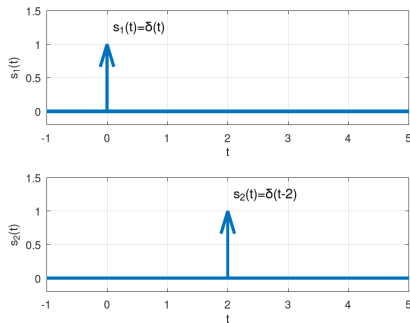


Rysunek: Przykłady działania skoku jednostkowego.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

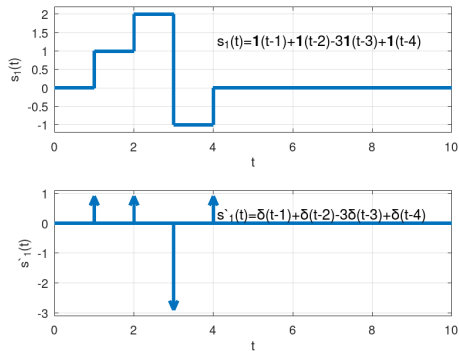
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

Impuls Diraca jest wielkością uogólnioną (dystrybucją), a nie zwykłą funkcją: opisuje idealny impuls o nieskończenie dużej wartości i skończonym, jednostkowym polu.



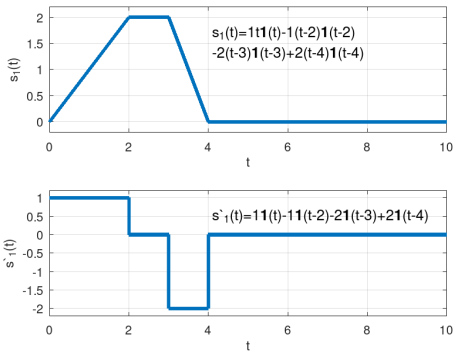
Rysunek: Przykłady działania impulsu jednostkowego.

- Mnożenie  $\delta(t)$  przez stałą:  $a\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0, \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(\tau)d\tau = a$
- Związek ze skokiem jednostkowym:  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \mathbf{1}(t)$ , w sensie dystrybucyjnym  $\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}$
- Własność próbkowania:  $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ ,  $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

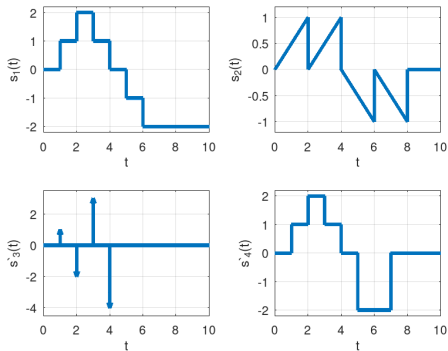


Rysunek: Przykładowe sygnały (I).





Rysunek: Przykładowe sygnały (II).



Rysunek: Przykładowe sygnały (III).

- $s_1(t) = \mathbf{1}(t - 1) - 2\mathbf{1}(t - 2) + \mathbf{1}(t - 3)$
- $s_2(t) = t\mathbf{1}(t - 1) - \delta(t - 2) - 2t\mathbf{1}(t - 3) + t\mathbf{1}(t - 4)$
- $s'_3(t) = \delta(t) + \delta(t - 1) - 2\delta(t - 3)$
- $s'_4(t) = \mathbf{1}(t - 1) + \delta(t - 1) - \mathbf{1}(t - 2) - 3\delta(t - 3)$

## Wykład 10

- Transformacja Laplace'a - przekształcenie zamieniające funkcję w dziedzinie czasu  $f(t)$  na funkcję w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$ , czyli transformatę  $F(s)$ .
- Przekształcenie proste:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- Przekształcenie odwrotne (w zapisie ogólnym):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st} ds,$$

gdzie  $\gamma$  jest tak dobrane, aby prosta całkowania leżała w obszarze zbieżności transformaty.

- Transformata Laplace'a -  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$  - funkcja w dziedzinie zespolonej  $s$ .
- Oryginał funkcji -  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$  - funkcja w dziedzinie czasu.

- Metoda umożliwia zamianę równań różniczkowych zwyczajnych w równania algebraiczne (w dziedzinie zespolonej  $s$ ).
- Rozwiązania równania różniczkowego uzyskuje się po wykonaniu odwrotnej transformaty.
- W praktyce korzysta się z tablic transformat Laplace'a oraz znanych własności (pochodna, całka, przesunięcie, spłot), zamiast liczyć całki bezpośrednio z definicji.

- $s_1(t) = \delta(t)$
- $s_2(t) = \mathbf{1}(t)$

Tabela: Ważniejsze własności transformacji Laplace'a

| Nr | Działanie w dz. czasu  | $f(t)$                  | $F(s)$                                  |
|----|------------------------|-------------------------|-----------------------------------------|
| 1  | Dodawanie              | $f_1(t) + f_2(t)$       | $F_1(s) + F_2(s)$                       |
| 2  | Mnożenie przez skalar  | $k \cdot f(t)$          | $k \cdot F(s)$                          |
| 3  | Skalowanie ( $a > 0$ ) | $f(at)$                 | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| 4a | Pochodna               | $\frac{d}{dt} f(t)$     | $sF(s) - f(0^-)$                        |
| 4b | Pochodna               | $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$ | $s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$          |



Tabela: Ważniejsze własności transformacji Laplace'a

| Nr | Działanie w dz. czasu       | $f(t)$                                        | $F(s)$                                   |
|----|-----------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------|
| 5  | Całkowanie                  | $\int_{0-}^t f(\tau) d\tau$                   | $\frac{1}{s} F(s)$                       |
| 6  | Opóźnienie o $t_0 > 0$      | $\mathbf{1}(t - t_0) f(t - t_0)$              | $F(s) \cdot e^{-st_0}$                   |
| 7  | Splot funkcji przyczynowych | $\mathbf{1}(t) f_1(t) * \mathbf{1}(t) f_2(t)$ | $F_1(s) \cdot F_2(s)$                    |
| 8  | Mnożenie funkcji            | $f_1(t) \cdot f_2(t)$                         | $\frac{1}{2\pi j} \cdot F_1(s) * F_2(s)$ |

Tabela: Ważniejsze własności transformacji Laplace'a

| Nr | Działanie w dz. czasu                                   | $f(t)$                   | $F(s)$                              |
|----|---------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 9  | Mnożenie przez funkcję wykładniczą o wykładniku $s_0 t$ | $f(t) \cdot e^{s_0 t}$   | $F(s - s_0)$                        |
| 10 | Mnożenie przez $t$                                      | $t \cdot f(t)$           | $-\frac{d}{ds} F(s)$                |
| 11 | Dzielenie przez $t$                                     | $\frac{1}{t} \cdot f(t)$ | $\int_s^\infty F(p) dp$             |
| 12 | Obliczanie wartości początkowej dla $f(t)$              | $f(0^+)$                 | $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ |
| 13 | Obliczanie wartości końcowej dla $f(t)$                 | $f(\infty)$              | $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$      |

Tabela: Wybrane transformaty Laplace'a

| Nr | $f(t)$             | $F(s)$               |
|----|--------------------|----------------------|
| 1  | $\delta(t)$        | 1                    |
| 2  | $\mathbf{1}(t)$    | $\frac{1}{s}$        |
| 3  | $\mathbf{1}(t)t$   | $\frac{1}{s^2}$      |
| 4  | $\mathbf{1}(t)t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |

Tabela: Wybrane transformaty Laplace'a

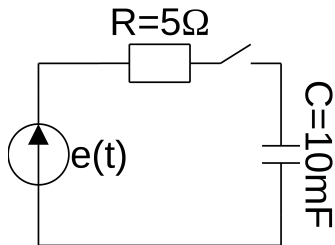
|   |                                  |                                 |
|---|----------------------------------|---------------------------------|
| 5 | $\mathbf{1}(t)e^{-\alpha t}$     | $\frac{1}{s + \alpha}$          |
| 6 | $\mathbf{1}(t)te^{-\alpha t}$    | $\frac{1}{(s + \alpha)^2}$      |
| 7 | $\mathbf{1}(t)t^n e^{-\alpha t}$ | $\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$ |

Tabela: Wybrane transformaty Laplace'a

| Nr  | $f(t)$                                                           | $F(s)$                                           |
|-----|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 8a  | $\mathbf{1}(t) \sin(\omega_0 t)$                                 | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$              |
| 8b  | $\mathbf{1}(t) \cos(\omega_0 t)$                                 | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$                     |
| 9a  | $\mathbf{1}(t)e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$                    | $\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$   |
| 9b  | $\mathbf{1}(t)e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$                    | $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ |
| 10a | $\mathbf{1}(t)t \sin(\omega_0 t)$                                | $\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$       |
| 10b | $\mathbf{1}(t) (\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t))$ | $\frac{2\omega_0^3}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$       |

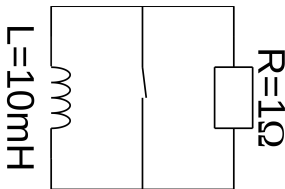
- $F_1(s) = \frac{1}{s+4}$
- $F_2(s) = \frac{1}{(s+2)^3}$
- $F_3(s) = \frac{5}{s^2+16}$
- $F_4(s) = \frac{1}{s^2+8s+16}$
- $F_5(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$
- $F_6(s) = \frac{s}{(s+1)^3} = \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}$
- $F_7(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$
- $F_8(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1}$

## Symulacja 1



Rysunek: Przykład 1.

## Symulacja 2



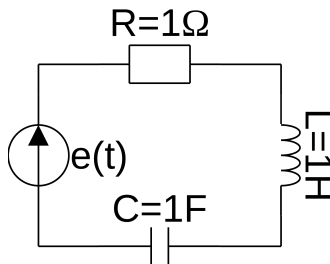
Rysunek: Przykład 2.



- Zapisz równania obwodu w dziedzinie czasu, np. z prawa Kirchhoffa.
- Określ warunki początkowe kondensatorów i cewek.
- Przejdź do dziedziny  $s$  za pomocą transformaty Laplace'a.
- Zamień elementy inercyjne na ich odpowiedniki operatorowe i uwzględnij warunki początkowe.
- Rozwiąż otrzymany układ równań algebraicznych względem szukanej transformaty.
- Wykonaj odwrotną transformację Laplace'a i otrzymaj przebieg czasowy prądu lub napięcia.

# Wykład 11

## Symulacja 3



$$e(t)=1(t) \text{ V}$$

Rysunek: Przykład 3.

**Impedancja operatorowa** - stosunek transformaty Laplace'a napięcia na elemencie do transformaty Laplace'a prądu płynącego przez ten element, przy zadanych warunkach początkowych.

Dla zerowych warunków początkowych ma postać:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

- Rezystor:  $u_R(t) = Ri_R(t) \Rightarrow U_R(s) = RI_R(s) \Rightarrow Z_R(s) = R$

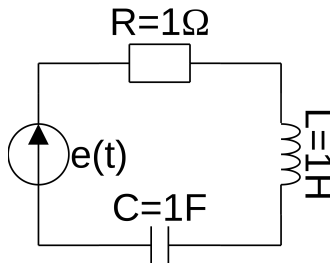
- Kondensator:  $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$

$$I_C(s) = C (sU_C(s) - u_C(0^-)) \Rightarrow \left| u_C(0^-) = 0 \right| \Rightarrow Z_C(s) = \frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC}$$

- Induktor:  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

$$U_L(s) = L (sI_L(s) - i_L(0^-)) \Rightarrow \left| i_L(0^-) = 0 \right| \Rightarrow Z_L(s) = \frac{U_L(s)}{I_L(s)} = sL$$

## Symulacja 4



$$e(t) = \mathbf{1}(t) \sin(t) \text{ V}$$

Rysunek: Przykład 4.

- Po przejściu do dziedzin  $s$  elementy  $R$ ,  $L$  i  $C$  można opisać za pomocą ich impedancji operatorowych:  $R$ ,  $sL$ ,  $\frac{1}{sC}$ .
- Dzięki temu obwód z elementami inercyjnymi można analizować podobnie jak obwód rezystancyjny, stosując prawa Kirchhoffa i przekształcenia algebraiczne.
- Po wyznaczeniu zależności między sygnałem wejściowym i wyjściowym otrzymujemy transmitancję układu.
- Transmitancja opisuje właściwości dynamiczne całego układu, a nie pojedynczego elementu.

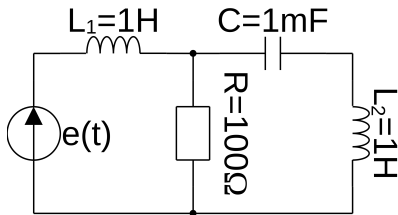
**Transmitancja** - stosunek transformaty Laplace'a wyjścia układu do transformaty Laplace'a jego wejścia przy zerowych warunkach początkowych.

Zwykle oznaczana jako  $G(s)$  lub  $H(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Transmitancja opisuje własności układu, a nie konkretnego wymuszenia.

## Symulacja 5

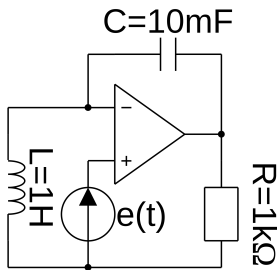


$$e(t) = 5 \mathbf{1}(t) \text{ V}$$

Rysunek: [Przykład 5.](#)



## Symulacja 6



$$e(t)=\mathbf{1}(t)\sin(8\pi t) \text{ V}$$

Rysunek: Przykład 6.

- W przypadku niezerowych warunków początkowych należy zachować ciągłość wielkości magazynujących energię:  $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ ,  $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ .
- **Stan ustalony** - sytuacja, w której zakładamy, że wszystkie człony postaci  $e^{-\alpha t}$  już wygasły i mają pomijalnie mały wpływ na wyjście układu.
- **Transmitancja** - stosunek transformaty Laplace'a wyjścia układu do transformaty Laplace'a jego wejścia przy zerowych warunkach początkowych. Zwykle oznaczana jako  $G(s)$  lub  $H(s)$ .

## Wykład 12

- **Impedancja** - uogólnienie rezystancji, czyli zespolona zależność między napięciem i prądem w obwodach prądu sinusoidalnego. W przypadku elementów inercyjnych jest funkcją częstotliwości.
- W metodzie wskazowej zakładamy pobudzenie sinusoidalne.
- Analiza wykonywana jest w stanie ustalonym, dlatego nie bierzemy pod uwagę warunków początkowych.

Oznaczenia:

- $x(t)$  - sygnał rzeczywisty
- $\hat{x}(t)$  - sygnał zespolony / wskaz wirujący
- $\hat{X}$  - zespolona amplituda / wskaz

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Jeżeli układ pobudzany jest sygnałem  $e(t) = \sin(\omega t)$ , to możemy przedstawić go jako:

$$e(t) = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ) = \Re \left( e^{j(\omega t - 90^\circ)} \right) = \Re \left( e^{j\omega t} e^{-j90^\circ} \right)$$

$$\hat{e}(t) = e^{j\omega t} e^{-j90^\circ}, \quad \hat{E} = e^{-j90^\circ}$$

Na powyższym przykładzie widać, że w przypadku liczb zespolonych przesunięcie fazy można przedstawić w postaci mnożenia przez liczbę zespoloną.

Założmy sygnał postaci

$$e(t) = \sin(\omega t) = \Re \left( e^{j(\omega t - 90^\circ)} \right), \quad \hat{e}(t) = e^{j(\omega t - 90^\circ)}$$

Jego pochodna wynosi:

$$\frac{de(t)}{dt} = \omega \cos(\omega t)$$

Analogiczne przekształcenie wykonane przy pomocy liczb zespolonych:

$$\frac{d\hat{e}(t)}{dt} = j\omega e^{j(\omega t - 90^\circ)}$$

$$\Re \left( \frac{d\hat{e}(t)}{dt} \right) = \omega \Re \left( j e^{j(\omega t - 90^\circ)} \right) = \omega \cos(\omega t)$$

Na podstawie powyższego równania można zauważyć, że w przypadku operacji na liczbach zespolonych pochodna odpowiada mnożeniu przez  $j\omega$ , czyli jednocześnie skalowaniu przez  $\omega$  i przesunięciu fazy o  $90^\circ$ .

Impedancja przez swój zespolony charakter nie tylko działa jak zależna od częstotliwości „rezystancja”, ale skutkuje również dodatkowym przesunięciem fazy wynikowego sygnału.

**Jeżeli obwód liniowy pobudzany jest sygnałem sinusoidalnym, to w stanie ustalonym na jego wyjściu może pojawić się wyłącznie sygnał sinusoidalny o tej samej pulsacji, ewentualnie przeskalowany i przesunięty w fazie.**

$$\hat{i}_C(t) = C \frac{d\hat{u}_C(t)}{dt} \rightarrow (\hat{u}_C(t) \sim e^{j\omega t}) \rightarrow \hat{i}_C(t) = j\omega C \hat{u}_C(t)$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$$

Na podstawie powyższej zależności widać, że napięcie na kondensatorze jest opóźnione o  $90^\circ$  względem prądu płynącego przez niego.

Moduł impedancji kondensatora wynosi  $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$ .



$$\hat{u}_L(t) = L \frac{d\hat{i}_L(t)}{dt} \rightarrow \left( \hat{i}_L(t) \sim e^{j\omega t} \right) \rightarrow \hat{u}_L(t) = j\omega L \hat{i}_L(t)$$

$$Z_L(j\omega) = \frac{\hat{U}_L}{\hat{I}_L} = j\omega L$$

$$Z_L(j\omega) = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$$

Na podstawie powyższej zależności widać, że napięcie na cewce wyprzedza w fazie prąd o  $90^\circ$ .

Moduł impedancji cewki wynosi  $|Z_L| = \omega L$ .

- Rezystor:  $Z_R = R = Re^{j0^\circ}$  - brak przesunięcia fazowego między napięciem i prądem.
- Induktor:  $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ}$  - napięcie wyprzedza prąd o  $90^\circ$ .
- Kondensator:  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}$  - napięcie jest opóźnione o  $90^\circ$  względem prądu.
- W metodzie wskazowej obwód sinusoidalny analizujemy algebraicznie, zastępując elementy R, L i C ich impedancjami zespolonymi.

## Wykład 13

- Wszystko działa analogicznie jak w prądzie stałym, z tym że zamiast rezystancji wewnętrznej występuje impedancja wewnętrzna.
- Wszystko można liczyć na wskazach, a dopiero w ostatecznej postaci przejść do sygnałów rzeczywistych z odpowiednim przesunięciem fazowym.
- Przykład

- $p(t)$  - moc chwilowa:  $p(t) = u(t) i(t)$
- $\bar{P}$  - moc średnia:  $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T p(\tau) d\tau$
- Napięcie skuteczne - wartość napięcia okresowego równa takiemu napięciu stałemu, które na danym oporze wydziela tę samą moc średnią.
- W przypadku przebiegu sinusoidalnego o amplitudzie  $A$ :  $U_{sk} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ . Dla innych przebiegów okresowych zależność między wartością skuteczną i amplitudą może być inna.
- Dla napięcia sieciowego  $U_{sk} \approx 230 \text{ V}$ , co oznacza amplitudę  $A \approx 325 \text{ V}$ .
- Przykład

- Przyjmijmy:
- $U_{sk}$  - napięcie skuteczne na elemencie
- $I_{sk}$  - prąd skuteczny przepływający przez element
- $\phi$  - kąt przesunięcia fazy między napięciem i prądem
- $P$  - moc czynna:  $P = U_{sk} I_{sk} \cos(\phi)$  - moc faktycznie zamieniana na pracę lub ciepło [W]
- $Q$  - moc bierna:  $Q = U_{sk} I_{sk} \sin(\phi)$  - związana z okresowym magazynowaniem energii w elementach inercyjnych [var]
- $S$  - moc pozorna:  $S = U_{sk} I_{sk}$ , przy czym zachodzi zależność  $S^2 = P^2 + Q^2$  [VA]

W przypadku podłączenia wyłącznie rezystancji do obwodu prądu przemiennego moc bierna jest zerowa.

Włączenie elementów inercyjnych może spowodować pojawienie się mocy biernej, związanej z wymianą energii między źródłem a polem elektrycznym lub magnetycznym.

- Między mocą czynną, bierną i pozorną zachodzi zależność:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

- Współczynnik mocy opisuje zależność:

$$\cos \phi = \frac{P}{S}$$

- Dla obciążenia rezystancyjnego:  $\phi = 0$ , więc  $Q = 0$  oraz  $P = S$ .
- Dla obciążenia indukcyjnego moc bierna jest dodatnia:  $Q > 0$ .
- Dla obciążenia pojemnościowego moc bierna jest ujemna:  $Q < 0$ .

Maksymalną moc ze źródła Thevenina lub Nortona można uzyskać, dołączając impedancję o wartości:

$$Z_{obc} = Z_{wewn}^*$$

czyli impedancję równą sprzężeniu zespolonemu impedancji wewnętrznej źródła.

Przykład



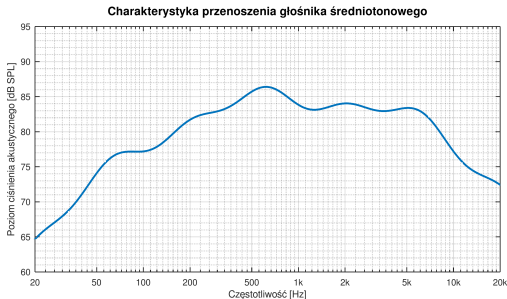
- Obwód rezonansowy - układ LC, w którym przy określonej częstotliwości energia w stanie ustalonym przepływa okresowo między kondensatorem a induktorem.
- W idealnym rezonansie część bierna impedancji wejściowej zanika, więc układ ma charakter czysto rzeczywisty.
- Oznacza to brak przesunięcia fazowego między napięciem i prądem widzianymi od strony źródła.

- Rezonans powstający w obwodzie, w którym elementy  $L$  i  $C$  (oraz dodatkowo  $R$ ) są połączone szeregowo, nazywamy rezonansem szeregowym lub rezonansem napięć.
- Przy częstotliwości rezonansowej szeregowe połączenie  $LC$  zachowuje się jak zwarcie w obwodzie idealnym, a w praktyce jak bardzo mała impedancja.
- Przy częstotliwości rezonansowej napięcie i prąd na źródle są zgodne w fazie, zatem obwód przyjmuje charakter rzeczywisty.
- Przykład

- Rezonans powstający w obwodzie, w którym elementy  $L$  i  $C$  (oraz dodatkowo  $R$ ) są połączone równolegle, nazywamy rezonansem równoległym lub rezonansem prądów.
- Przy częstotliwości rezonansowej równoległe połączenie  $LC$  zachowuje się jak rozwarcie w obwodzie idealnym, a w praktyce jak bardzo duża impedancja.
- Przy częstotliwości rezonansowej napięcie i prąd na źródle są zgodne w fazie, zatem obwód przyjmuje charakter rzeczywisty.
- Przykład

## Wykład 14

Charakterystyka Bodego – logarytmiczna charakterystyka częstotliwościowa układu: wzmocnienia (charakterystyka amplitudowa) oraz przesunięcia fazy (charakterystyka fazowa) w funkcji częstotliwości.



Rysunek: Przykład charakterystyki częstotliwościowej.

- Na ogół oś pozioma ma logarytmiczną skalę częstotliwości.
- W charakterystyce amplitudowej oś pionowa przedstawia wzmocnienie w dB.
- W charakterystyce fazowej oś pionowa jest liniowa, zwykle od  $-180^\circ$  do  $180^\circ$ .

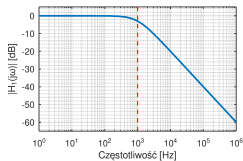
$$K_{[\text{dB}]} = 20 \log_{10} \left( \frac{A}{A_0} \right)$$

Układy z elementami RLC, w których stosunek zespolonych amplitud napięcia wyjściowego do wejściowego (transmitancja widmowa  $H(j\omega)$ ) jest funkcją częstotliwości.

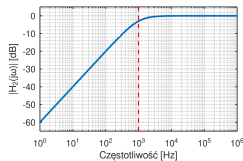
- Pasmo przenoszenia – zakres częstotliwości, dla których moduł transmitancji spełnia  $|H(j\omega)| > \frac{1}{\sqrt{2}}$  (czyli tłumienie mniejsze niż  $-3$  dB).
- Pasmo zaporowe – zakres częstotliwości, dla których moduł transmitancji spełnia  $|H(j\omega)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (tłumienie większe niż  $-3$  dB).

Charakterystyki amplitudowe filtrów idealnych

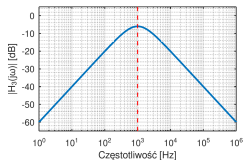
Filtr dolnoprzepustowy



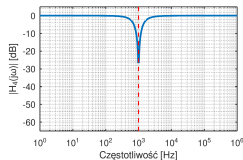
Filtr górnoprzepustowy



Filtr pasmowo przepustowy



Filtr pasmowo zaporowy



Rysunek: Przybliżona odpowiedź częstotliwościowa.



Dla prostego filtra RC dolnoprzepustowego transmitancja ma postać:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Częstotliwość graniczna tego filtra wynosi:

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

- Dla małych częstotliwości moduł transmitancji jest bliski 1, więc sygnał jest przepuszczany.
- Dla dużych częstotliwości moduł transmitancji maleje do zera, więc sygnał jest tłumiony.
- Przy częstotliwości granicznej moduł transmitancji wynosi  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , czyli odpowiada spadkowi o 3 dB.

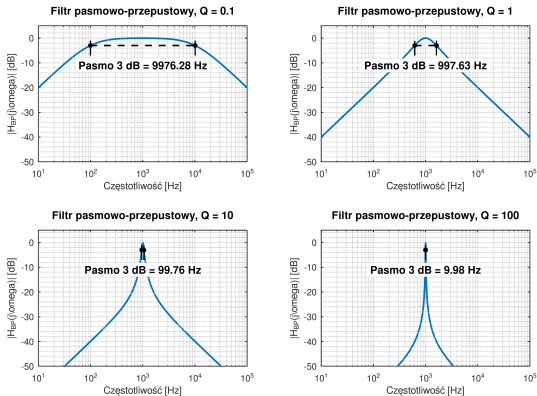
- Dobroć filtra (dla filtru pasmowoprzepustowego) – bezwymiarowa miara „wąskości” pasma:

$$Q = \frac{f_0}{f_{g,3dB} - f_{d,3dB}}$$

gdzie  $f_0$  – częstotliwość środkowa,  $f_{d,3dB}$ ,  $f_{g,3dB}$  – dolna i górna częstotliwość graniczna (dla  $-3$  dB).

- Rząd filtra – stopień wielomianu w mianowniku transmitancji operatorowej; określa stromość zboczy charakterystyki (np.  $\pm 20$  dB/dekadę na rząd dla filtrów Butterwortha).

Charakterystyki  $|H_{BP}(j\omega)|$  dla różnych  $Q$



Rysunek: Przykład filtrów o różnej dobroci.

## Właściwości:

- Krótkie pasmo przejściowe – filtr Czebyszewa ma strome zbocza, dzięki czemu szybciej tłumi sygnały poza pasmem niż filtr Butterwortha; kosztem są zafalowania.
- Typy:
  - Typ I – zafalowania w paśmie przepustowym, pasmo zaporowe monotoniczne.
  - Typ II (ang. Inverse Chebyshev) – pasmo przepustowe monotoniczne, zafalowania w paśmie zaporowym.
- Zastosowania – gdy ważne jest szybkie tłumienie sygnałów poza pasmem, np. w systemach komunikacyjnych i przetwarzania sygnałów.

## Właściwości:

- Monotoniczna charakterystyka amplitudowa – brak zafalowań w paśmie przepustowym i zaporowym.
- Maksymalnie płaska charakterystyka w paśmie przepustowym – minimalne zniekształcenia amplitudowe w użytecznym paśmie.
- Łagodniejsze zbocza niż w filtrach Czebyszewa – przejście z pasma przepustowego do zaporowego jest bardziej stopniowe.
- Dobra stabilność i odpowiedź impulsowa, co jest istotne w wielu zastosowaniach inżynierskich.

Przykłady filtrów pasywnych

Filtry aktywne wykorzystują wzmacniacze operacyjne w połączeniu z rezystorami, kondensatorami i ewentualnie cewkami do realizacji funkcji filtrujących.

Są często bardziej elastyczne niż filtry pasywne o tych samych charakterystykach. **Zalety filtrów aktywnych:**

- Możliwość wzmocnienia sygnału (układ może mieć wzmocnienie większe niż 1).
- Brak konieczności stosowania cewek – mniejszy rozmiar, niższy koszt i brak problemów z indukcyjnościami pasożytniczymi.
- Łatwiejsza precyzyjna regulacja charakterystyk dzięki doborowi wartości  $R$  i  $C$  oraz topologii układu.

Przykłady filtrów aktywnych



# Wykład 15

Szereg Fouriera - rozwinięcie funkcji okresowej w sumę składowej stałej oraz harmonicznym sinusoidalnym.

Równanie syntezy funkcji:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{2n\pi}{T} x \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi}{T} x \right) \right)$$

lub równoważnie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi f_0 n x) + b_n \sin(2\pi f_0 n x))$$

gdzie  $f_0 = \frac{1}{T}$  jest częstotliwością podstawową.

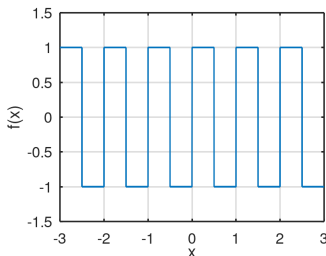
Szereg Fouriera pozwala wyznaczyć współczynniki opisujące udział kolejnych harmoniczych. Równania analizy funkcji:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

W przypadku funkcji nieokresowej zamiast sumy harmoniczych otrzymujemy transformatę Fouriera w postaci całki po częstotliwości.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in (0 + kT; 0.5T + kT] \\ -1, & \text{dla } x \in (0.5T + kT; T + kT] \end{cases}$$



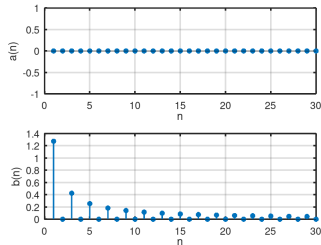
Rysunek: Sygnał prostokątny w dziedzinie czasu.

Dla rozpatrywanego sygnału prostokątnego:

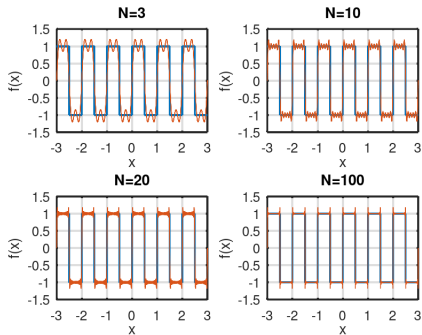
$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2 - 2 \cos(\pi n)}{\pi n}$$

co oznacza, że występują tylko harmoniczne sinusowe, a współczynniki dla parzystych  $n$  są równe zero.

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2 - 2 \cos(\pi n)}{\pi n}$$



Rysunek: Amplituda kolejnych harmoniczych.



Rysunek: Przykłady sygnału oryginalnego i syntezowanego z różnej liczby harmonicznych.

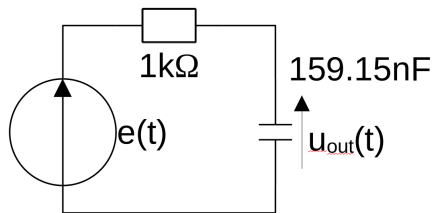
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in (0 + kT; 0.5T + kT] \\ -1, & \text{dla } x \in (0.5T + kT; T + kT] \end{cases}$$

gdzie  $T = 1 \text{ ms}$  oraz  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

Powyższy sygnał można zdekomponować do postaci sumy harmoniczných o częstotliwościach  $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi f_0 n x)$$
$$b_n = \frac{2 - 2 \cos(\pi n)}{\pi n}$$





Rysunek: Schemat układu z filtrem.

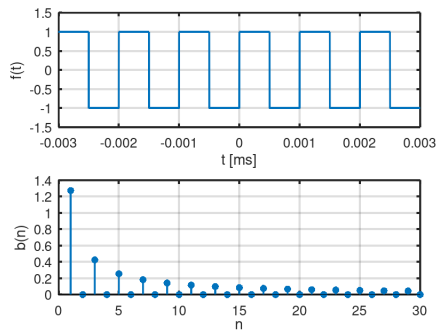
$$H(j\omega) = \frac{2000\pi}{j\omega + 2000\pi} \quad H(jf) = \frac{1000}{jf + 1000}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji każdą harmoniczną można filtrować niezależnie:

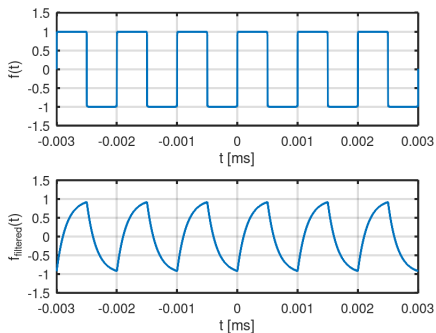
$$f_{\text{filtered}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n |H(j2\pi f_0 n)| \sin(2\pi f_0 n x + \arg(H(j2\pi f_0 n)))$$

W rozpatrywanym przykładzie parzyste harmoniczne mają zerowe współczynniki.

| $n$ | $f_n$ | $b_n$  | $H(j2\pi f_n)$            | $ H $  | $\arg(H)$       |
|-----|-------|--------|---------------------------|--------|-----------------|
| 1   | 1 kHz | 1.2732 | $0.7071e^{-45^\circ}$     | 0.7071 | $-45^\circ$     |
| 3   | 3 kHz | 0.4244 | $0.3162e^{-71.565^\circ}$ | 0.3162 | $-71.565^\circ$ |
| 5   | 5 kHz | 0.2546 | $0.1961e^{-78.690^\circ}$ | 0.1961 | $-78.690^\circ$ |
| 7   | 7 kHz | 0.1819 | $0.1414e^{-81.870^\circ}$ | 0.1414 | $-81.870^\circ$ |



Rysunek: Testowy sygnał w dziedzinie czasu oraz częstotliwości.



Rysunek: Sygnał w dziedzinie czasu przed oraz po filtracji.

Równanie syntezy funkcji:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n x}$$

Równanie analizy funkcji:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} f(x) e^{-j\frac{2\pi n}{T} x} dx$$

Applet pokazujący działanie transformacji Fouriera.

- Szereg Fouriera stosujemy do sygnałów okresowych.
- Transformata Fouriera opisuje sygnały nieokresowe przez ciągłe widmo częstotliwościowe.
- Transformata Laplace'a jest szczególnie użyteczna dla sygnałów przyczynowych oraz do analizy układów dynamicznych.

- Sygnał okresowy  $\rightarrow$  szereg Fouriera.
- Sygnał nieokresowy  $\rightarrow$  transformata Fouriera.
- Równania różniczkowe, warunki początkowe, odpowiedzi układów  $\rightarrow$  transformata Laplace'a.
- Wszystkie te narzędzia opisują ten sam sygnał, ale z innej perspektywy.

Transformata Fouriera:

$$\hat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi\eta x} dx$$

Transformata Laplace'a:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

Odwrotna transformata Fouriera:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta) e^{j2\pi\eta x} d\eta$$

Odwrotna transformata Laplace'a:

$$f(x) = \frac{1}{j2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\lambda - j\omega}^{\lambda + j\omega} F(s) e^{sx} ds$$

Applet pokazujący działanie transformacji Fouriera.







Dziękuję za uwagę!



Fundusze Europejskie  
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita  
Polska

Dofinansowane przez  
Unię Europejską



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus  
w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021 – 2027